PreUnAB

PROPORCIONALIDAD EN LA CIRCUNFERENCIA

Clase # 18

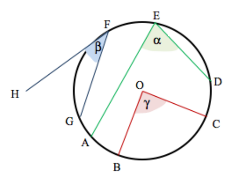
Universidad Andrés Bello

Octubre 2014

ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

Tipos de ángulos en una circunferencia

En la figura, O es centro de la circunferencia, y A, B, C, D, E, F, G, puntos en la circunferencia. $\overline{FH}$ es recta tangente en F.



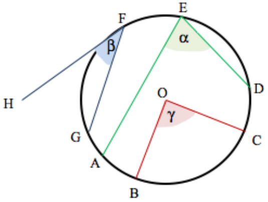
Definiciones:

•$\alpha = \angle AED$: Ángulo inscrito con el vértice E sobre la circunferencia y con lados que son cuerdas de la misma.
•$\beta = \angle GFH$: Ángulo semi-inscrito cuyo vértice está en la circunferencia y tiene un lado que es tangente en dicho vértice y el otro que es una cuerda.
•$\gamma = \angle AED$: Ángulo central o del centro con el vértice en el centro de la circunferencia y con sus lados coincidentes con radios.

ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

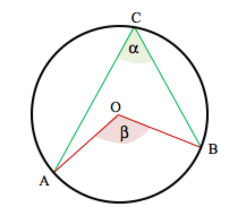
Teorema de ángulos inscritos en una circunferencia

• Los ángulos inscritos que subtienden (abarcan) el mismo arco son congruentes.
• Un ángulo inscrito mide la mitad del arco que subtiende (abarca).
• Un ángulo del centro mide lo mismo que el arco que subtiende (abarca).



Teorema del ángulo inscrito y ángulo central en una circunferencia

Cuando un ángulo inscrito y un ángulo del centro de una circunferencia abarcan el mismo arco,. el ángulo inscrito vale la mitad que el del centro



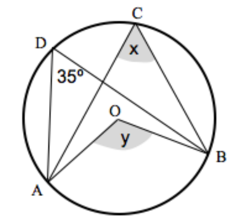
Se cumple que:

$$\beta = 2\alpha$$

ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

Ejemplo

En la figura, O es centro de la circunferencia y A, B, C y D son puntos en esta, calcule el valor de $x + y$



Solución:

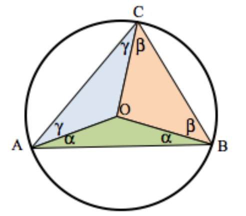
El ángulo de 35^o y el ángulo x son inscritos que subtienden el mismo arco. Por lo tanto $x = 35^o$.
El ángulo x es inscrito y el ángulo y es central, ambos con el mismo arco. Por lo tanto: $y = 2 \cdot 35^o = 70^o$.
Finalmente $x + y = 105^o$

ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

Triángulos en el ángulo inscrito y ángulo central de una circunferencia

En la figura O es centro de la circunferencia, se distingue que:

$\angle ACB$ = ángulo inscrito
$\angle AOB$ = ángulo del centro
$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ radio de la circunferencia.

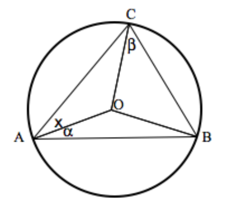


Por lo tanto:

$\triangle ABO$ es isósceles de base AB y sus ángulos basales α son congruentes.
$\triangle BCO$ es isósceles de base AB y sus ángulos basales β son congruentes.
$\triangle CAO$ es isósceles de base AB y sus ángulos basales γ son congruentes.

Ejemplo

En la figura, O es centro de la circunferencia y A, B y C, son puntos en esta.
Si $\alpha = 25^o$ y $\beta = 50^o$, calcule la medida del ángulo x .

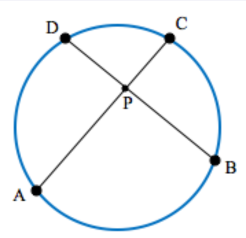


Solución:

Si $\alpha = 25^o \rightarrow \angle ABO = 25^o \rightarrow$ el ángulo central : $180^o - 50^o = 130^o$.
Por lo tanto, el ángulo inscrito $\angle ACB$ que subtiende el mismo arco, mide: $130/2 = 65^o$.
Como $\beta = 50^o$, el ángulo $\angle OCA$ mide $65^o - 50^o = 15^o$.
El ángulo $x = 15^o$, porque es congruente con el $\angle OCA$, por ser los ángulos basales del triángulo isósceles $\triangle ACO$.

Teorema de las cuerdas

Si dos cuerdas se interceptan en el interior de la circunferencia, el producto de los segmentos determinados en una cuerda es igual al producto de los segmentos determinados en la otra cuerda.

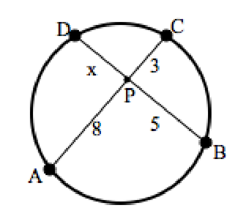


Se cumple que:

$$\overline{AP} \cdot \overline{PC} = \overline{BP} \cdot \overline{PD}$$

Ejemplo

En la figura, AC y BD son cuerdas que se intersectan en P. Con las medidas dadas, calcule el valor de x.



Aplicando el teorema de las cuerdas, se tiene que:

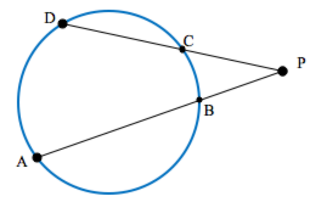
$$5x = 8 \cdot 3$$

$$x = \frac{8 \cdot 3}{5}$$

$$x = 4,8$$

Teorema de las secantes

Si dos rectas secantes interceptan a una circunferencia, el producto entre el segmento exterior a la circunferencia con el segmento total en una de las secantes es igual al producto de los correspondientes segmentos en la otra secante.



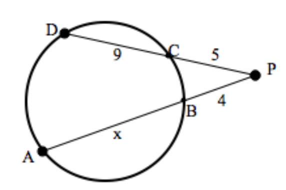
Se cumple que:

$$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \overline{DP} \cdot \overline{CP}$$

Proporcionalidad de trazos en la circunferencia

Ejemplo

En la figura, PD y PA son secantes que se intersectan en P. Con las medidas dadas, calcule el valor de x.



Aplicando el teorema de las secantes, se tiene que:

$$5 \cdot (5+9)x = 4 \cdot (4+x)$$

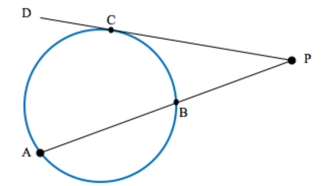
$$70 = 16 + 4x$$

$$4x = 54$$

$$x = 13,5$$

Teorema de la secante y la tangente

Si desde un punto exterior a una circunferencia, se trazan una tangente y una secante, el cuadrado del segmento tangente equivale al producto entre el segmento exterior y el segmento total de la recta secante.

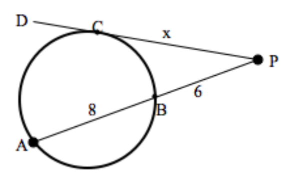


Se cumple que:

$$(\overline{PC})^2 = \overline{PB} \cdot \overline{PA}$$

Ejemplo

En la figura, PA es secante y PD recta tangente a la circunferencia en C. Con las medidas dadas, calcule el valor de x.



Aplicando el teorema de la secantes y tangente, se tiene que:

$$x^2 = 6 \cdot (6 + 8)$$

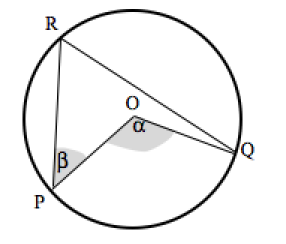
$$x^2 = 6 \cdot (14)$$

$$x = \sqrt{84}$$

$$x = 2\sqrt{21}$$

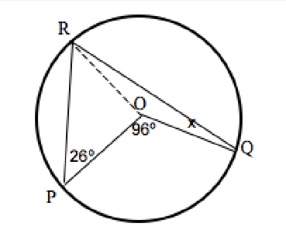
Ejercicio 1:

En la figura, O es centro de la circunferencia. Si $\alpha = 96^o$ y $\beta = 26^o$, la medida de $\angle OQR$ es



Solución:

Levando los datos a la figura:

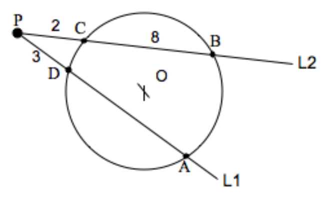


El ángulo inscrito $PRQ = 96 : 2 = 48^o$
El ángulo $PRO = 26^o$
El ángulo inscrito $ORQ = 48 - 26 = 22^o$

Luego, el ángulo $OQR = 22^o$

Ejercicio 2:

En la figura, circunferencia de centro O, $L1$ y $L2$ son rectas que se intersectan en P e intersectan la circunferencia en los puntos A y D y en B y C, respectivamente.
Con los valores dados, encuentre el valor de la cuerda $\overline{AD}$



Solución:

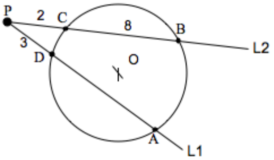
De acuerdo a la figura y los datos, se aplica el teorema de las secantes:

$$3 \cdot (3 + \overline{AD}) = 2 \cdot (2 + 8)$$

$$9 + 3\overline{AD} = 20$$

$$3\overline{AD} = 11$$

$$\overline{AD} = \frac{11}{3}$$



Adelanto

Próximo Martes:

Martes 14 de octubre, 17:30 Perímetros y Áreas.

Más Información y Ejercicios :

www.preunab.cl