GUIAS
Prueba de Selección Universitaria

UNIVERSIDAD ANDRES BELLO

MATEMÁTICA
GUÍA 2
RESPUESTAS

I. EJERCICIOS DE DESARROLLO

1. Calcular el valor numérico de las siguientes potencias:

1.1. $2^3 \cdot 3^2 =$

Primero se desarrollan las potencias y finalmente el producto:

$$2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72$$

1.2. $3^3 - 2^5 =$

Primero se desarrollan las potencias y finalmente la diferencia:

$$3^3 - 2^5 = 27 - 32 = -5$$

1.3. $4^3 - 2 \cdot 3^2 =$

Primero se desarrollan las potencias, luego el producto y finalmente la diferencia:

$$4^3 - 2 \cdot 3^2 = 64 - 2 \cdot 9 = 64 - 18 = 46$$

2. Aplicando las propiedades de las potencias, resolver:

2.1. $\dfrac{2^5 \cdot 4^5}{8^3} =$

En el numerador, se puede aplicar potencias de igual exponente:

$$\frac{2^5 \cdot 4^5}{8^3} = \frac{(2 \cdot 4)^5}{8^3} = \frac{8^5}{8^3}$$

Finalmente, se aplica división de potencias de igual base:

$$\frac{8^5}{8^3} = 8^{5-3} = 8^2 = 64.$$

Entonces: $\dfrac{2^5 \cdot 4^5}{8^3} = 64$

2.2. $\dfrac{x^3 \cdot y}{x\,y^{-2}} =$

Se aplica multiplicación y división de potencias de igual base:

$$\frac{x^3 \cdot y}{x\,y^{-2}} = x^{3-1} \cdot y^{1+2} = x^2 y^3$$

2.3. $\dfrac{a^5 \cdot b^{-1}}{a^2 \cdot b^{-4}} =$

Se aplica multiplicación y división de potencias de igual base:

$$\frac{a^5 \cdot b^{-1}}{a^2 \cdot b^{-4}} = a^{5-2} \cdot b^{-1+4} = a^3 \cdot b^3$$

Finalmente, se aplica potencias de igual exponente:

$$a^3 \cdot b^3 = (ab)^3$$

Entonces: $\dfrac{a^5 \cdot b^{-1}}{a^2 \cdot b^{-4}} = (ab)^3$

3. Resolver y expresar el resultado en notación científica:

3.1. 0,056 : 16 =

Primero se efectúa la división:

0,056 : 16 = 0,0035

Expresando finalmente el resultado en notación científica:

$0{,}0035 = 3{,}5 \cdot 10^{-3}$

Entonces: $0{,}056 : 16 = 3{,}5 \cdot 10^{-3}$

3.2. $2^{-3}\cdot(2.000)^2 =$

Transformando las potencias:

$$2^{-3}\cdot(2.000)^2 = \frac{1}{2^3}\cdot(2\cdot 1.000)^2 = \frac{1}{2^3}\cdot 2^2\cdot 1.000^2$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 1.000^2 = 500.000$$

Por último, se expresa el resultado en notación científica:

$$500.000 = 5\cdot 10^5$$

Entonces: $2^{-3}\cdot(2.000)^2 = 5\cdot 10^5$

3.3. $\frac{(0{,}25)^2\cdot 3}{0{,}00125} =$

Resolviendo productos y cocientes:

$$\frac{(0{,}25)^2\cdot 3}{0{,}00125} = 150$$

Finalmente se expresa el resultado en notación científica:

$$150 = 1{,}5\cdot 10^2$$

Entonces: $\frac{(0{,}25)^2\cdot 3}{0{,}00125} = 1{,}5\cdot 10^2$

4. Resolver las siguientes raíces:

4.1. $\sqrt{75} =$

Descomponiendo la cantidad subradical:

$$\sqrt{75} = \sqrt{25\cdot 3} = \sqrt{25}\cdot\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

4.2. $\sqrt[3]{\frac{0{,}024}{3}} =$

Resolviendo primero la operación del subradical:

$$\sqrt[3]{\frac{0{,}024}{3}} = \sqrt[3]{0{,}008} = \sqrt[3]{\frac{1}{125}} = \frac{1}{5}$$

4.3. $\sqrt{50}-\sqrt{18}=$

Primero se descomponen las raíces:

$$\sqrt{50}-\sqrt{18}=\sqrt{25\cdot 2}-\sqrt{9\cdot 2}=5\sqrt{2}-3\sqrt{2}$$

Reduciendo raíces semejantes:

$$5\sqrt{2}-3\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

Luego: $\sqrt{50}-\sqrt{18}=2\sqrt{2}$

5. Aplicando las propiedades de las raíces, resolver:

5.1. $\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^3}=$

Primero se expresa la raíz como:

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^3}=\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^3$$

Ahora se calcula la raíz cuadrada y se eleva a 3.

$$\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1^3}{2^3}=\frac{1}{8}$$

Entonces: $\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^3}=\frac{1}{8}$

5.2. $5\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{9}=$

Aplicando raíces de igual índice:

$$5\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{9}=5\cdot\sqrt[3]{3\cdot 9}=5\cdot\sqrt[3]{27}=5\cdot 3=15.$$

Luego: $5\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{9}=15$

5.3. $4^{1,5}=$

Primero se transforma el exponente decimal a fracción:

$$4^{1,5}=4^{3/2}$$

Luego se transforma a raíz

$$4^{3/2}=\left(\sqrt{4}\right)^3=2^3=8$$

Luego: $4^{1,5}=8$

6. Racionalizar denominadores:

6.1. $\frac{3}{\sqrt{5}} =$

Se amplifica la fracción por $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$:

$$\frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

6.2. $\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} =$

Se amplifica la fracción por $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$:

$$\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(1-\sqrt{2})}{3} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{3}$$

6.3. $\frac{3}{1+\sqrt{2}} =$

Se amplifica la fracción por el conjugado del denominador:

$$\frac{3}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{3(1-\sqrt{2})}{1-2} = \frac{3-3\sqrt{2})}{-1} = -3+3\sqrt{2}$$

O bien: $-3+3\sqrt{2} = 3\sqrt{2}-3 = 3(\sqrt{2}-1)$

7. Expresar como un solo término:

7.1. $8^{2/3}\cdot\sqrt{2}=$

Se expresa 8 como potencia de base 2 y la raíz se expresa como potencia:

$$8^{2/3}\cdot\sqrt{2}=(2^3)^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}=2^2\cdot 2^{\frac{1}{2}}$$

Queda así, una multiplicación de potencias de igual base:

$$2^2\cdot 2^{\frac{1}{2}}=2^{2+1/2}=2^{\frac{5}{2}}$$

Este puede ser expresado como raíz:

$$2^{\frac{5}{2}}=\sqrt{2^5}=\sqrt{32}$$

Entonces: $8^{2/3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{32}$

7.2. $\left(\sqrt{\frac{8}{\sqrt{2}}}\right)^4=$

Se expresa el 8 y la raíz de 2 como potencias de base 2:

$$\left(\sqrt{\frac{8}{\sqrt{2}}}\right)^4=\left(\sqrt{\frac{2^3}{2^{\frac{1}{2}}}}\right)^4$$

Operando como potencias de igual base:

$$\left(\sqrt{\frac{2^3}{2^{\frac{1}{2}}}}\right)^4=\left(\sqrt{2^{3-\frac{1}{2}}}\right)^4=\left(\sqrt{2^{5/2}}\right)^4$$

Se expresa la raíz como potencia:

$$\left(\sqrt{2^{5/2}}\right)^4=\left((2)^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{4}{2}}=2^5=32$$

Entonces: $\left(\sqrt{\frac{8}{\sqrt{2}}}\right)^4=32$

7.3. $\dfrac{\sqrt[3]{3^{10}} \cdot 2^5}{4 \cdot \sqrt{3}} =$

Se expresa todo como potencias de base 2 o base 3, según corresponda:

$$\frac{\sqrt[3]{3^{10}} \cdot 2^5}{4 \cdot \sqrt[3]{3}} \quad \frac{3^{\frac{10}{3}} \cdot 2^5}{2^2 \cdot 3^{\frac{1}{3}}}$$

Ahora se operan potencias de igual base:

$$\frac{3^{\frac{10}{3}} \cdot 2^5}{2^2 \cdot 3^{\frac{1}{3}}} = 3^{\frac{10}{3}-\frac{1}{3}} \cdot 2^{5-2} = 3^{9/3} \cdot 2^3 = 3^3 \cdot 2^3 = (3 \cdot 2)^3 = 6^3 = 216$$

Luego: $\dfrac{\sqrt[3]{3^{10}} \cdot 2^5}{4 \cdot \sqrt[3]{3}} = 216$

8. Calcular el valor numérico de las siguientes expresiones logarítmicas:

8.1. $log_2 64 =$

Aplicando la definición de logaritmo, debe darse que:

$$\log_2 64 = x \quad \Leftrightarrow \quad 2^x = 64$$

Expresando 64 como potencia de base 2:

$$2^x = 64$$
$$2^x = 2^6$$

Luego: x = 6

Entonces: $\log_2 64 = 6$

8.2. $log\, 0{,}1 =$

El logaritmo que no expresa la base, se entiende que es base 10 (logaritmo común).

Entonces: $\log 0{,}1 = x \quad \Leftrightarrow \quad 10^x = 0{,}1$

Expresando 0,1 como potencia de base 10:

$$10^x = 0{,}1$$
$$10^x = \frac{1}{10}$$
$$10^x = 10^{-1}$$

Luego: x = -1

Entonces: log 0,1 = -1

8.3. $\log_{\sqrt{8}} 16 =$

Aplicando la definición de logaritmo, debe darse que:

$$\log_{\sqrt{8}} 16 = x \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{8}\right)^x = 16$$

Expresando todo como potencia de base 2:

$$\left(\sqrt{8}\right)^x = 16$$

$$\left(\sqrt{2^3}\right)^x = 2^4$$

$2^{\frac{3x}{2}} = 2^4$; de donde:

$$\frac{3x}{2} = 4$$

x = 8/3

Entonces: $\log_{\sqrt{8}} 16 = 8/3$

9. Aplicando las propiedades de los logaritmos, calcular el valor numérico de las expresiones siguientes:

9.1. $\log 5 + \log 2 =$

Aplicando la propiedad de la suma de logaritmos:

$$\log 5 + \log 2 = \log(5 \cdot 2) = \log 10 = 1$$

Entonces: $\log 5 + \log 2 = 1$

9.2. $\log 50 - \log \frac{1}{2} =$

Aplicando la propiedad de la diferencia de logaritmos:

$$\log 50 - \log \tfrac{1}{2} = \log(50 : \tfrac{1}{2}) = \log 100 = 2$$

Entonces: $\log 50 - \log \frac{1}{2} = 2$

9.3. $\log\sqrt{1.000} =$

Expresando la raíz como potencia:

$$\log\sqrt{1.000} = \log 1.000^{\frac{1}{2}}$$

Aplicando la propiedad del logaritmo de una potencia:

$$\log 1.000^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\log 1.000 = \tfrac{1}{2}\cdot 3 = 3/2$$

Entonces: $\log\sqrt{1.000} = \dfrac{3}{2}$

10. Escribir en lenguaje algebraico las siguientes proposiciones:

10.1. El doble de x menos el cubo de y

El doble de x es: 2x

El cubo de y es: y^3

Entonces, el doble de x menos el cubo de y es: 2x - y^3

10.2. El triple de la diferencia de los cuadrados entre x e y

Los cuadrados de x e y son, respectivamente: x^2 e y^2

La diferencia de los cuadrados entre x e y es: x^2 - y^2

Entonces, el triple de la diferencia de los cuadrados entre x e y es: 3(x^2 - y^2)

10.3. La mitad de la diferencia entre el cuadrado de x y el cuádruplo de y.

El cuadrado de x es: x^2

El cuádruplo de y es: 4y

Entonces, la mitad de la diferencia entre el cuadrado de x y el cuádruplo de y es:

$$\tfrac{1}{2}\,(x^2 - 4y) = \frac{x^2 - 4y}{2}$$

11. Calcular el valor numérico de las siguientes expresiones:

11.1. $u^2 - 3u + 5$; si u = -4

Reemplazando u:

$$u^2 - 3u + 5 = (-4)^2 - 3 \cdot (-4) + 5 = 16 + 12 + 5 = 33$$

11.2. $3x^2y - 2xy$; si x = -3 e y = 5

Reemplazando x e y:

$$3x^2y - 2xy = 3 \cdot (-3)^2 \cdot 5 - 2 \cdot (-3) \cdot 5 = 135 + 30 = 165$$

11.3. $\frac{5}{3}x^2 - 4\sqrt{20x} - \log 10^x$; si x = 5

Reemplazando x:

$$\frac{5}{3}(5)^2 - 4\sqrt{20 \cdot (5)} - \log 10^{(5)} = \frac{125}{3} - 4 \cdot \sqrt{100} - 5\log 10 =$$

$$= \frac{125}{3} - 4 \cdot 10 - 5 \cdot 1 = \frac{125}{3} - 45 = \frac{125 - 135}{3} = \frac{-10}{3}$$

12. Desarrollar los siguientes productos de expresiones algebraicas:

12.1. $(3x - 7)^2 =$

Es un cuadrado de binomio:

$$(3x)^2 - 2 \cdot (3x) \cdot (7) + 7^2 = 9x^2 - 42x + 49$$

Luego: $(3x - 7)^2 = 9x^2 - 42x + 49$

12.2. $(5x + 6)(5x - 6) =$

Es un producto de una suma por su diferencia:

$$(5x + 6)(5x - 6) = (5x)^2 - (6)^2 = 25x^2 - 36$$

Luego: $(5x + 6)(5x - 6) = 25x^2 - 36$

12.3. $(8+9x)(2-5x)=$

Es un producto de binomios:

$$(8+9x)(2-5x)= 8\cdot 2+8\cdot(-5x)+9x\cdot 2+9x\cdot(-5x)$$
$$= 16 - 40x + 18x - 45x^2$$
$$= 16 - 22x - 45x^2$$

Entonces: $(8+9x)(2-5x) = 16 - 22x - 45x^2$

13. Factorizar las expresiones algebraicas siguientes:

12.1. $11x^3 - 7x^2 - x =$

Factorizando por x:

$$11x^3 - 7x^2 - x = x(11x^2 - 7x - 1)$$

12.2. $8x^2 - 4x^3 =$

Factorizando por $4x^2$:

$$8x^2 - 4x^3 = 4x^2(2 - x)$$

12.3. $10^{5x} + 10^{4x} =$

Primero se expresará la potencia $10^{5x} = 10^x \cdot 10^{4x}$.

Entonces:

$$10^{5x} + 10^{4x} = 10^x \cdot 10^{4x} + 10^{4x}$$

Ahora se puede factorizar por 10^{4x}:

$$10^{5x} + 10^{4x} = 10^x \cdot 10^{4x} + 10^{4x} = 10^{4x}(10^x + 1)$$

14. Factorizar los cuadrados perfectos:

14.1. $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$

14.2. $4x^2 - 12x - 9 =$ no es un cuadrado perfecto

14.3. $25a^4 - 70a^2 + 49 = (5a-7)^2$

15. Factorizar los siguientes trinomios:

15.1. $x^2 + 2x - 24 =$
Se buscan 2 números que, multiplicados den –24 y sumen 2.
Estos son el 6 y el –4.

Entonces: $x^2 + 2x - 24 =$ (x + 6) (x – 4)

15.2. $x^2 + 5x + 6 =$
Se buscan 2 números que, multiplicados den 6 y sumen 5.
Estos son el 3 y el 2.

Entonces: $x^2 + 5x + 6 =$ (x + 3) (x + 2)

15.3. $x^3 - 7x^2 + 10x =$
Previamente se factoriza por x:
$x^3 - 7x^2 + 10x = x(x^2 - 7x + 10)$

Ahora se factoriza el paréntesis, buscando dos números que, multiplicados den 10 y sumen -7.
Estos son el –5 y el –2.

Entonces: $x^3 - 7x^2 + 10x =$ x (x – 5) (x – 2)

II. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

1. De las siguientes igualdades, indique cuáles son verdaderas

I: $8^{1,5} = \left(\sqrt{2}\right)^9$ II: $3\sqrt{5} = \sqrt{45}$ III: $\log_2 10 = \sqrt{10}$

Solución:

I: $8^{1,5} = \left(\sqrt{2}\right)^9$

Convirtiendo el exponente 1,5 a fracción 3/2, queda:

$$8^{1,5} = 8^{3/2}$$

Expresando el 8 como potencia de base 2:

$$8^{1,5} = 8^{3/2} = (2^3)^{3/2}$$

Operando las fracciones del exponente:

$$(2^3)^{3/2} = 2^{9/2}$$

Transformando, finalmente a raíz:

$2^{9/2} = \sqrt{2^9} = (\sqrt{2})^9$; y la igualdad I es verdadera.

II: $3\sqrt{5} = \sqrt{45}$

El 3 puede expresarse como raíz de 9:

$$3\sqrt{5} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{5}$$

Aplicando producto de raíces de igual exponente:

$\sqrt{9}\cdot\sqrt{5} = \sqrt{9\cdot 5} = \sqrt{45}$; y la igualdad II es verdadera.

III: $\log_2 10 = \sqrt{10}$

El logaritmo en base 2 de 10 es el exponente al cual hay que elevar el 2 para obtener 10:

$\log_2 10 = \sqrt{10} \quad \Leftrightarrow \quad 2^{\sqrt{10}} = 10$; lo que es FALSO.

Respuesta: son verdaderas solo I y II.

2. Calcular el valor numérico de $\log(\sqrt{5}-2)+\log(\sqrt{5}+2)$

Solución:
Aplicando propiedad de la suma de logaritmos:

$$\log(\sqrt{5}-2)+\log(\sqrt{5}+2)= \log\left[(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)\right]$$

Quedando el logaritmo de un producto de una suma por su diferencia:

$$(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)=5-4=1$$

Por lo tanto:

$$\log(\sqrt{5}-2)+\log(\sqrt{5}+2)= \log\left[(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)\right] = \log 1 = 0.$$

Respuesta: $\log(\sqrt{5}-2)+\log(\sqrt{5}+2)=0.$

3. Calcular: $27^{\frac{1}{3}}-(\frac{4}{25})^{-\frac{1}{2}}=$

Solución:
El primer término puede ser convertido a raíz:

$$27^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{27}=3$$

El segundo término se convierte primero a potencia de exponente positivo, y luego a raíz:

$$(\frac{4}{25})^{-\frac{1}{2}}=(\frac{25}{4})^{1/2}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}}=\frac{5}{2}$$

Entonces:

$$27^{\frac{1}{3}}-(\frac{4}{25})^{-\frac{1}{2}}= 3+\frac{5}{2}=\frac{11}{2}=5{,}5$$

Respuesta: $27^{\frac{1}{3}}-(\frac{4}{25})^{-\frac{1}{2}}=$ 11/2 = 5,5

4. Calcular el valor numérico de $\left(\sqrt{11-2\sqrt{10}}-\sqrt{11+2\sqrt{10}}\right)^2=$

Solución:
Corresponde a un cuadrado de binomio:
El cuadrado del primer término es: $11-2\sqrt{10}$
El cuadrado del segundo término es: $11+2\sqrt{10}$
El doble producto del primero por el segundo es:

$$2\cdot\sqrt{11-2\sqrt{10}}\cdot\sqrt{11+2\sqrt{10}}=2\cdot\sqrt{(11-2\sqrt{10})\cdot(11+2\sqrt{10})}=$$

Obsérvese que el subradical corresponde al producto de una suma por su diferencia:

$$=2\cdot\sqrt{121-40}=2\cdot\sqrt{81}=2\cdot 9=18$$

Entonces:

$$\left(\sqrt{11-2\sqrt{10}}-\sqrt{11+2\sqrt{10}}\right)^2=11-2\sqrt{10}+11+2\sqrt{10}-18=4$$

Respuesta: $\left(\sqrt{11-2\sqrt{10}}-\sqrt{11+2\sqrt{10}}\right)^2=4$

5. Calcular y expresar en notación científica $\frac{1}{5}\cdot\frac{200^6}{40.000^3}$

Solución:

Expresando el numerador y el denominador como producto de una potencia de base 10:

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{200^6}{40.000^3}=\frac{1}{5}\cdot\frac{(2\cdot 100)^6}{(4\cdot 10.000)^3}$$

Aplicando potencia de igual exponente:

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{(2\cdot 100)^6}{(4\cdot 10.000)^3}=\frac{1}{5}\cdot\frac{2^6\cdot 100^6}{4^3\cdot 10.000^3}=\frac{1}{5}\cdot\frac{2^6\cdot 100^6}{4^3\cdot 100^6}=\frac{1}{5}\cdot\frac{2^6}{2^6}=\frac{1}{5}=0{,}2$$

Ahora hay que expresar 0,2 como notación científica:

$$0{,}2=2\cdot 10^{-1}$$

Respuesta: $\frac{1}{5}\cdot\frac{200^6}{40.000^3}=2\cdot 10^{-1}$

6. Calcular: $\dfrac{4^{1/3}\cdot(\sqrt{8})^6\cdot 2^{-13}}{\sqrt{32}} =$

Solución:
Primero se transformarán los términos en potencias de base 2:

$$\frac{4^{1/3}\cdot(\sqrt{8})^6\cdot 2^{-13}}{\sqrt{32}} = \frac{(2^2)^{1/3}\cdot(\sqrt{2^3})^6\cdot 2^{-13}}{\sqrt{2^5}} =$$

Ahora las raíces a potencia, y se operarán los exponentes:

$$\frac{(2^2)^{1/3}\cdot(\sqrt{2^3})^6\cdot 2^{-13}}{\sqrt{2^5}} = \frac{2^{2/3}\cdot(2^{3/2})^6\cdot 2^{-13}}{2^{5/2}} = \frac{2^{2/3}\cdot 2^{18/2}\cdot 2^{-13}}{2^{5/2}} = \frac{2^{2/3}\cdot 2^{9}\cdot 2^{-13}}{2^{5/2}} =$$

Ahora se divide y multiplican las potencias de igual base:

$$\frac{2^{2/3}\cdot 2^{9}\cdot 2^{-13}}{2^{5/2}} = 2^{2/3}\cdot 2^9\cdot 2^{-13}\cdot 2^{-5/2} = 2^{2/3+9-13-5/2} = 2^{-35/6}$$

Este número puede expresarse de varias formas:

$$2^{-35/6} = 2^{-5}\cdot 2^{-5/6} = 2^{-5}\cdot\sqrt[6]{2^{-5}} = \left(2\sqrt[6]{2}\right)^{-5}$$

Respuesta: $\dfrac{4^{1/3}\cdot(\sqrt{8})^6\cdot 2^{-13}}{\sqrt{32}} = 2^{-35/6} = 2^{-5}\cdot 2^{-5/6} = 2^{-5}\cdot\sqrt[6]{2^{-5}} = \left(2\sqrt[6]{2}\right)^{-5}$

7. Reducir la expresión: $\dfrac{6a^2-24}{a+2}$

Solución:
El numerador puede ser factorizado por 6:

$$\frac{6a^2-24}{a+2} = \frac{6(a^2-4)}{a+2}$$

El factor en el paréntesis es un producto de una suma por su diferencia. Entonces:

$$\frac{6(a^2-4)}{a+2} = \frac{6(a+2)(a-2)}{a+2}$$

Simplificando (a + 2):

$$\frac{6(a+2)(a-2)}{a+2} = 6(a-2)$$

Respuesta: $\dfrac{6a^2-24}{a+2} = 6(a-2)$

8. Reducir la expresión: $\dfrac{a^2-11a+30}{a^2-5a-6}$

Solución:
En el numerador se factoriza. Dos números que multiplicados den 30 y sumados den -11 son el -5 y el -6.
En el denominador se factoriza. Dos números que multiplicados den -6 y sumados den -5 son el 1 y el -6.

Entonces:
$\dfrac{a^2-11a+30}{a^2-5a-6}=\dfrac{(a-5)(a-6)}{(a+1)(a-6)}$. Simplificando por (a – 6):

$$\frac{a^2-11a+30}{a^2-5a-6}=\frac{(a-5)(a-6)}{(a+1)(a-6)}=\frac{a-5}{a+1}$$

Respuesta: $\dfrac{a^2-11a+30}{a^2-5a-6}=\dfrac{a-5}{a+1}$

9. Un estanque tiene $(a-1)$ litros de agua y para llenarlo se necesitan (*b* + 1) litros más. ¿Cuál es la capacidad del estanque?

Solución:
Sea x la capacidad total del estanque.

Si el estanque tiene $(a-1)$ litros y para llenarlo se agregan (*b* + 1) litros, entonces, su capacidad total es igual a:

$$x=(a-1)+(b+1)=a+b$$

Respuesta: la capacidad total del estanque es (a + b) litros.

10. Una madre tiene 24 años y su hijo 4 años. ¿Dentro de cuántos años la edad de la madre será el doble de la del hijo?

Solución:
Hoy el hijo tiene 4 años y la madre 24.

Dentro de "x" años, el hijo tendrá: ($4+x$) años
Dentro de "x" años, la madre tendrá: ($24+x$) años

Para que la madre tenga el doble de edad que su hijo, el valor de x debe ser:

$$24+x=2(4+x)$$
$$24+x=8+2x$$
$$24-8=2x-x$$
$$16=x$$

Respuesta: en 16 años más, la edad de la madre será el doble de la de su hijo.

SELECCIÓN MÚLTIPLE

1. El valor de $\dfrac{1{,}2\cdot(0{,}01)^{-2}\cdot(-0{,}1)^{2}}{4\cdot(0{,}1)^{4}}$ **, expresado en notación científica es igual a:**

Solución:

Desarrollando el producto en el numerador resulta: 120

El producto en el denominador resulta: 0,0004

Realizando el cuociente 120 / 0,0004 = 300.000

Expresando 300.000 como notación científica: $3\cdot 10^{5}$

Alternativa correcta: E.

2. $\sqrt{27}+\sqrt{\dfrac{50}{9}}-\dfrac{4}{3\sqrt{2}}-\dfrac{3}{\sqrt{12}}=$

Solución:

La raíz de 27, de 50 y de 12 serán descompuestas:

$$\sqrt{27}+\sqrt{\frac{50}{9}}-\frac{4}{3\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{12}}=\sqrt{9\cdot 3}+\sqrt{\frac{25\cdot 2}{9}}-\frac{4}{3\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{4\cdot 3}}.$$

$$=3\sqrt{3}+\frac{5}{3}\sqrt{2}-\frac{4}{3\sqrt{2}}-\frac{3}{2\sqrt{3}}$$

Racionalizando el término: $\dfrac{4}{3\sqrt{2}}=\dfrac{4}{3\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3\cdot 2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

Racionalizando el término: $\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{3}{2\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\cdot 3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Queda, entonces:

$$3\sqrt{3}+\frac{5}{3}\sqrt{2}-\frac{4}{3\sqrt{2}}-\frac{3}{2\sqrt{3}}=3\sqrt{3}+\frac{5}{3}\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Sumando algebraicamente raíces semejantes:

$$3\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{3}\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{6\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2}+\frac{5\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{3}=\frac{5}{2}\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

Alternativa correcta: B.

3. Al racionalizar el denominador de la expresión: $\frac{-4}{1-\sqrt{5}}$ queda:

Solución:
Para racionalizar un denominador binomial, se amplifica por su correspondiente conjugado:

$$\frac{-4}{1-\sqrt{5}} = \frac{-4}{1-\sqrt{5}} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{-4(1+\sqrt{5})}{1-(\sqrt{5})^2} = \frac{-4(1+\sqrt{5})}{1-5} = \frac{-4(1+\sqrt{5})}{-4} = 1+\sqrt{5}$$

Alternativa correcta: A.

4. $\log\frac{13}{8} - \log\frac{26}{56} + \log\frac{12}{7} = ?$

Solución:
Aplicando la propiedad del logaritmo de un cuociente:

$$\log\frac{13}{8} - \log\frac{26}{56} + \log\frac{12}{7} = \log 13 - \log 8 - \log 26 + \log 56 + \log 12 - \log 7$$

Algunos argumentos serán descompuestos en productos:

$$\log 13 - \log 8 - \log (13 \cdot 2) + \log (7 \cdot 8) + \log (4 \cdot 3) - \log 7$$

Ahora se aplicará la propiedad del logaritmo de un producto:

$$\log 13 - \log 8 - \log 13 - \log 2 + \log 7 + \log 8 + \log 4 + \log 3 - \log 7$$

Reduciendo los términos opuestos, queda:

$\log 4 + \log 3 - \log 2$, que puede ser expresado como: $\log \frac{4 \cdot 3}{2} = \log 6$

Alternativa correcta: C.

Otra forma:
Aplicando la propiedad que el logaritmo de una suma es el logaritmo del producto y que el logaritmo de una resta es el logaritmo del cuociente:

$$\log\frac{13}{8} - \log\frac{26}{56} + \log\frac{12}{7} = \log(\frac{13}{8} \cdot \frac{12}{7}) - \log\frac{26}{56} = \log\frac{\frac{13}{8} \cdot \frac{12}{7}}{\frac{26}{56}} = \log(\frac{13}{8} \cdot \frac{12}{7} \cdot \frac{56}{26}) = \log(\frac{13}{26} \cdot 12)$$

$$= \log(\frac{1}{2} \cdot 12) = \log 6$$

5. Si 2 log a^2 = 3, entonces a^4 = ?

Solución:

En la igualdad: 2 log $a^2 = 3$, se aplica la propiedad del logaritmo:

$$\log (a^2)^2 = 3.$$ Resolviendo la potencia:

$$\log a^4 = 3$$

Escribiendo el 3 como log 1.000

$$\log a^4 = \log 1.000$$

Cancelando los logaritmos, queda finalmente que:

$$a^4 = 1.000 = 10^3$$

Alternativa correcta: D.

6. Los divisores del polinomio $x^3 + 2x^2 - 8x$ son:

I: x   II: (x + 4)   III: (x – 2)

Solución:

Primero: se factoriza el polinomio por x, quedando:

$$x^3 + 2x^2 - 8x = x(x^2 + 2x - 8)$$

Ahora se factoriza el trinomio del paréntesis:

$$x(x^2 + 2x - 8) = x(x+4)(x-2)$$

Por lo tanto, los tres factores son divisores del polinomio original.

Alternativa correcta: E.

7. $\left(\sqrt{x^2 - 16} - 4\right)^2 =$

Solución:

Se trata de un cuadrado de binomio.

El cuadrado del primer término es: $x^2 - 16$

El doble producto del primero por el segundo es: $-8\sqrt{x^2 - 16}$

El cuadrado del segundo término es: 16

Por lo tanto:

$$\left(\sqrt{x^2 - 16} - 4\right)^2 = x^2 - 16 - 8\sqrt{x^2 - 16} + 16$$

Reduciendo términos semejantes, queda:

$$x^2 - 8\sqrt{x^2 - 16}$$

Alternativa correcta: B.

8. $\dfrac{a^2 - 11a - 42}{a^2 - 9} =$

Solución:
El numerador se puede factorizar como producto de dos binomios, mientras que el denominador es el producto de una suma por su diferencia.

$$\frac{a^2 - 11a - 42}{a^2 - 9} = \frac{(a+3)(a-14)}{(a+3)(a-3)}$$

Simplificando por (a + 3), queda:

$$\frac{a^2 - 11a - 42}{a^2 - 9} = \frac{(a+3)(a-14)}{(a+3)(a-3)} = \frac{(a-14)}{(a-3)}$$

Alternativa correcta: C.

9. La expresión: "un medio de la diferencia entre los cuadrados de x e y", algebraicamente se expresa:

Solución:
Primero: la diferencia entre los cuadrados de x e y se escribe $x^2 - y^2$

Segundo: Un medio de esta diferencia es: $\dfrac{x^2 - y^2}{2}$

Alternativa correcta: D.

10. Se puede calcular el valor numérico de la expresión $\dfrac{5xy + 5x - 6y - 6}{y+1}$ **, si:**

(1) x = –5
(2) y = 13

Solución:
Aparentemente, para calcular el valor numérico de la expresión, se debe conocer el valor de x y el de y.
Pero, si se factoriza en numerador, queda:

$$\frac{5xy + 5x - 6y - 6}{y+1} = \frac{(5x-6)(y+1)}{y+1}$$

Simplificando (y + 1), la expresión queda reducida a (5x – 6), que solo depende del valor de x.

Por lo tanto, con la información (1) es suficiente para resolver el problema.

Alternativa Correcta: A