PreUnAB

Ecuación de la Recta en el Espacio

Clase # 21

Universidad Andrés Bello

Octubre 2014

Sistema de Coordenada Rectangular en el Espacio

Definición

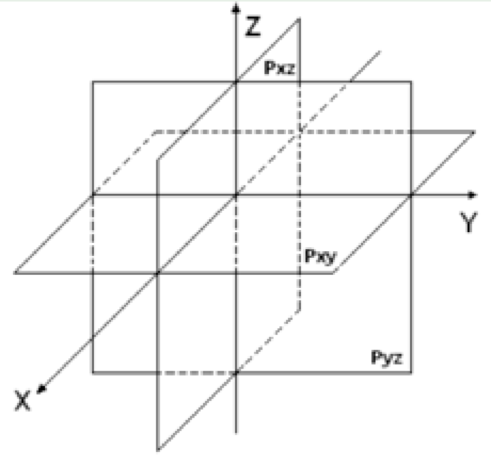
Un sistema de coordenadas rectangulares en el espacio está determinado por tres planos mutuamente perpendiculares, Los ejes generalmente son identificados por letras X, Y, Z y se habla frecuentemente del eje X, del eje Y y del eje Z, donde:

- El eje X es la recta determinada por la intersección de los planos P_{xy} y P_{xz}.
- El eje Y es la recta determinada por la intersección de los planos P_{xy} y P_{yz}.
- El eje Z es la recta determinada por la intersección de los planos P_{xz} y P_{yz}.

Sistema de Coordenada Rectangular en el Espacio

Planos Coordenados:

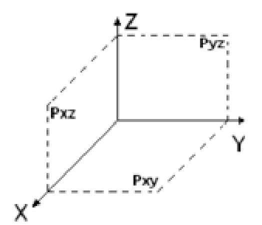
Los planos P_{xy}, P_{xz}, P_{yz}, que se cortan en un mismo punto O, como se presenta en la siguiente imagen:



Planos Coordenados:

- El plano coordenado XY que denotaremos por P_{xy}, es determinado por las rectas: eje X y eje Y.
- El plano coordenado XZ que denotaremos por P_{xz}, es determinado por las rectas: eje X y eje Z.
- El plano coordenado YZ que denotaremos por P_{yz}, es determinado por las rectas: eje Y y eje Z.

Los planos coordenados dividen al espacio tridimensional en 8 sub-espacios llamados octantes.



Distancia entre dos Puntos

La distancia entre dos puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ del espacio tridimensional está dado por:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Ejemplo

La distancia entre los $A(3, -2, 5)$ y $B(3, 1, 7)$ es:

$$d(A, B) = \sqrt{(3 - 3)^2 + (1 - (-2))^2 + (7 - 5)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{13}$$

Punto Medio

El punto medio determinado por dos puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ del espacio tridimensional está dado por:

$$P_m(P_1, P_2) = \left(\frac{x_2 + x_1}{2} + \frac{y_2 + y_1}{2} + \frac{z_2 + z_1}{2} \right)$$

Ejemplo

Las coordenadas del punto medio del segmento que determinan los puntos $A(3, -2, 5)$ y $B(3, 1, 7)$ es:

$$P_m = \left(\frac{3+3}{2} + \frac{-2+1}{2} + \frac{5+7}{2} \right)$$

$$P_m = \left(3, \frac{-1}{2}, 6 \right)$$

Vectores Unitarios

Se definen los vectores unitarios:

- $\hat{i} = (1, 0, 0)$, en dirección positiva del eje x
- $\hat{j} = (0, 1, 0)$, en dirección positiva del eje y
- $\hat{k} = (0, 0, 1)$, en dirección positiva del eje z

Los vectores asociados con las direcciones de los ejes coordenados cartesianos x, y, z se designan por $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$, respectivamente. Los vectores cartesianos permiten expresar analíticamente los vectores por medio de los vectores unitarios.

Ejemplo

La expresión analítica del vector $v = (-3, 5 - 2)$

$$v = -3\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$$

Ecuaciones de la recta en el espacio

En función de su posición relativa, existen dos tipos de puntos: colineales y coplanarios. Los denominados colineales son aquellos contenidos en una recta, no importando cuantos puntos sean mientras estén alineados y dentro de la recta. Se denominan puntos coplanarios a aquellos que están contenidos en un mismo plano.

Ejemplo

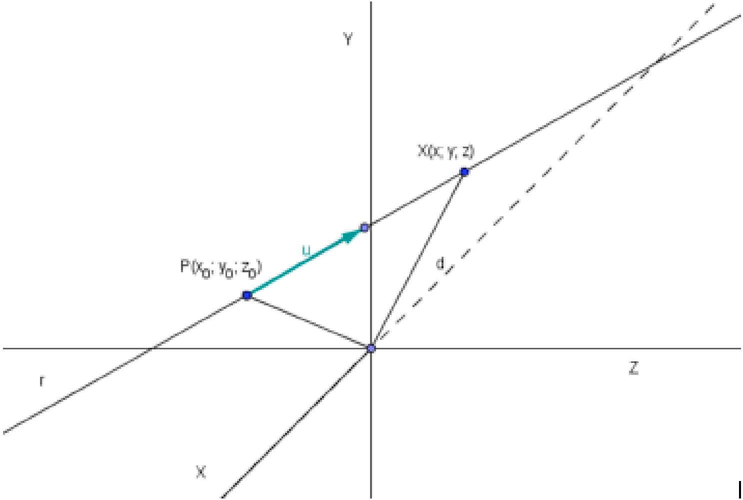
Comprobar si los puntos $A(1,2,3)$, $B(1,-2,4)$ y $C(1,-3,5)$ están alineados: Si los puntos están alineados, los vectores tienen la misma dirección y sus componentes son proporcionales:

$$\overline{AB} = (1-1, -2-2, 4-3) = (0, -4, 1)$$

$$\overline{AC} = (1-1, -3-2, 5-3) = (0, -5, 2)$$

Con esto las razones son: $\dfrac{-4}{-5} \neq \dfrac{1}{2}$. No están alineados.

Ecuación Vectorial de la Recta



Ecuación Vectorial de la Recta

Un vector director u, es un vector que da la dirección de una recta y también la orienta, es decir le da un sentido determinado.
Sea $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto de la recta r y $u = (u_1, u_2, u_3)$ su vector director. Para cualquier otro punto $X(x, y, z)$, de la recta r, el vector PX tiene igual dirección que u , luego es igual u multiplicado por un escalar: $PX = \lambda \cdot u$

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \lambda \cdot (u_1, u_2, u_3)$$

$$(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) = \lambda \cdot (u_1, u_2, u_3)$$

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \cdot (u_1, u_2, u_3)$$

Es decir, una recta L, está formada por el conjunto de puntos, tales que:

$$L = \{x \in \mathbb{R}^3 / x = P + \lambda u\}$$

Ecuaciones Paramétricas de la Recta

Operando en la ecuación vectorial de la recta llegamos a la igualdad:

$$(x, y, z) = (x_0 + \lambda u_1; y_0 + \lambda u_2; z_0 + \lambda u_3)$$

Esta igualdad se verifica si:

$$x = x_0 + \lambda u_1; y = y_0 + \lambda u_2; z = z_0 + \lambda u_3$$

Ecuaciones Continuas de la Recta

Despejando e igualando λ en las ecuaciones paramétricas se tiene:

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}$$

Ejercicio 1

La ecuación de la recta que pasa por el punto $(8, 2, 3)$ y lleva la dirección del vector $\hat{j}$

Solución:

El punto por el cual pasa la recta es el punto $A(8, 2, 3)$, siendo el vector director el vector $\hat{j} = (0, 1, 0)$, entonces:

$$x = 8$$

$$y = 2 + \lambda$$

$$z = 3$$

Ejercicio 2

La ecuación paramétricas, en forma continua, de la recta que pasa por los puntos $A(1,0,1)$ y $B(0,1,1)$ es:

Solución:
Determinamos el vector director
$\overline{AB} = (0-1, 1-0, 1-1) = (-1,1,0)$.
Consideramos el punto (x_0, y_0, z_0) , el punto $A(1,0,1)$, y finalmente reemplazamos en la expresión, obteniendo:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{0}$$

Adelanto

Próxima Semana:

Jueves 23 de Octubre, 17:30 Transformaciones Isométricas.

Más Información y Ejercicios :

www.preunab.cl