Funciones de Crecimiento

Clase # 13

Universidad Andrés Bello

Concepto de Función de Crecimiento

Concepto de Crecimiento

- Una función es creciente cuando, al aumentar los valores de la variable independiente (x) también aumentan los de la variable dependiente (y), y viceversa, al disminuir los valores de la variable independiente, también disminuyen los de la variable dependiente.
- Una función es decreciente cuando al aumentar los valores de la variable independiente (x), disminuyen los de la variable dependiente (y), y viceversa, al disminuir los valores de la variable independiente, los de la variable dependiente, aumentan.

Concepto de Función de Crecimiento

Formalmente

- Formalmente una función es creciente si, en determinado intervalo real, se cumple que:

$$f(x+1) > f(x)$$

- Formalmente una función es decreciente si, en determinado intervalo real, se cumple que:

$$f(x+1) < f(x)$$

Concepto de Función de Crecimiento

Crecimiento Aritmético

Una función tiene crecimiento aritmético si:

- $f(x+1) - f(x) = d$ donde d es una constante real. Esta constante se denomina "razón de crecimiento aritmético".
- Si $d > 0 \rightarrow$ la función es creciente aritmética.
- Si $d < 0 \rightarrow$ la función es decreciente aritmética.

Sea la función real $f(x) = 1 - 2x$. Entonces:

$$f(1) = -1; f(2) = -3; f(3) = -5; f(4) = -7$$

Se cumple que:
$f(4) - f(3) = -2; f(3) - f(2) = -2; f(2) - f(1) = -2$
Como la diferencia es constante, la función tiene crecimiento aritmético -2. Como $2 < 0$, se trata de una función decreciente aritmética. El valor de $f(x)$ decrece en 2 unidades por cada unidad de crecimiento de x.

Concepto de Función de Crecimiento

Crecimiento Geométrico

Una función tiene crecimiento geométrico si:

- Si $\dfrac{f(x+1)}{f(x)} = r$, donde r es una constante real.
- Si $r > 1 \rightarrow$ la función es creciente geométrica.
- Si $r < 1 \rightarrow$ la función es decreciente geométrica.

Sea la función: $f(x) = 5 \cdot 2^x$. Determine su razón de crecimiento.

$$f(0) = 5; f(1) = 10; f(2) = 20; f(3) = 40$$

Se verifica que:

$$\frac{f(4)}{f(3)} = \frac{40}{20} = \frac{f(3)}{f(2)} = \frac{20}{10} = \frac{f(2)}{f(1)} = \frac{10}{5} = 2 = r$$

Como el cuociente es constante, la función tiene crecimiento geométrico. Como 2 es mayor que uno, la función es creciente.

Concepto de Función de Crecimiento

Tasa de crecimiento

Generalmente el crecimiento (o decrecimiento) geométrico de una variable se da en $\%$ de crecimiento o decrecimiento por cada unidad de variación de la variable independiente.

- Si $\dfrac{f(x+1)}{f(x)} = r$, donde r es la razón de crecimiento geométrico, entonces:
- La expresión $(r-1)$ corresponde al tanto por uno $(\frac{\%}{100})$ de crecimiento (o decrecimiento), que puede ser expresado en $\%$ al multiplicarlo por 100.

Función Lineal

Definición

La función lineal es una de las funciones más utilizadas para describir el crecimiento de una variable dependiente y en función de una variable independiente x.
El modelo lineal tiene la forma:

$$f(x) = a + bx$$

Donde b es la pendiente y a es el intercepto.

Dominio y recorrido de la función lineal

- Dominio: $Dom f = x \in \mathbb{R}$
- Recorrido: $Rec f = y \in \mathbb{R}$

Función Lineal

Ceros de la función lineal

- Intersección con eje x: $(\frac{-a}{b}, 0)$
- Intersección con eje y: $(0, a)$

Casos particulares de la pendiente

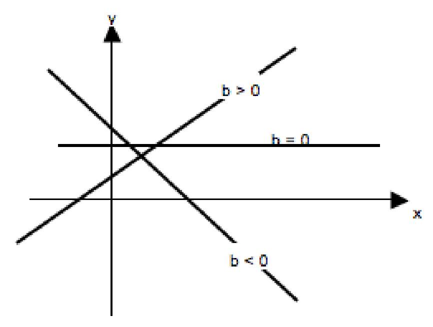
- Si $b > 0 \rightarrow y$ crece a medida que x crece.
- Si $b < 0 \rightarrow y$ decrece a medida que x crece.
- Si $b = 0 \rightarrow y$ es constante.

Razón de crecimiento de la función lineal

La función lineal presenta un crecimiento aritmético, cuya razón de crecimiento es igual la pendiente b. El crecimiento o decrecimiento está dado por el signo de la pendiente:

- Si $b > 0 \rightarrow$ la función tiene crecimiento aritmético.
- Si $b < 0 \rightarrow$ la función tiene decrecimiento aritmético.

Gráfica de la función lineal:



Ejemplo

Se tiene la función real: $f(x) = 7 - 3x$. Es una función decreciente (signo menos de la pendiente) con razón de crecimiento aritmético -3 (valor de la pendiente). Como el crecimiento es negativo, se puede hablar de "decrecimiento".

Función Exponencial

Definición

El modelo exponencial tiene la forma:

$$f(x) = a \cdot b^x$$

Con a y $b \in \mathbb{R}, a > 0, b > 0, b \neq 1$

Dominio y recorrido de la función exponencial

- Dominio: $Dom f = x \in (-\infty, \infty)$
- Recorrido: $Rec f = y \in (0, \infty)$

Función Exponencial

Ceros de la función exponencial

- Intersección con eje x: no hay
- Intersección con eje y: $(0, b)$

Casos particulares de la pendiente

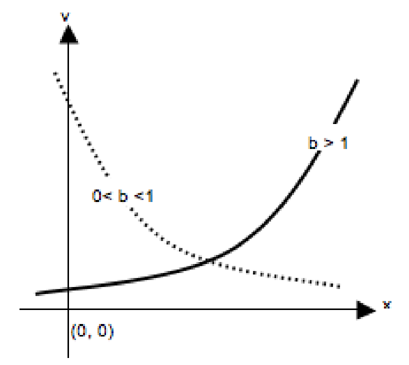
- Si $b > 1$ la curva es creciente.
- Si $0 < b < 1$ la curva es decreciente.

Razón de crecimiento de la función exponencial

La función exponencial presenta un crecimiento geométrico con razón de crecimiento igual a la constante b.

- Si la constante $b < 1$, pero mayor que cero, la función es decreciente.
- Si la constante $b > 1$, la función es creciente.

Gráfica de la función exponencial



Ejemplo

Se tiene la función real: $f(x) = 8 \cdot 2^x$, es una función de crecimiento geométrico, creciente, ya que 2 es mayor que 1, y su razón de crecimiento es 2.

Tasa de Crecimiento

La expresión $(r-1)$ corresponde al tanto por uno de crecimiento (o decrecimiento), que puede ser fácilmente expresado en $\%$.

Ejemplo

En la función real $f(x) = 25 \cdot 0,9^x$, la razón de crecimiento es $0,9$. Por lo tanto su tasa de crecimiento es $0,9–1 = -0,1$, que llevado a $\%$ da un $-10\,\%$. Por el signo $(-)$ significa que la variable dependiente decrece un $10\,\%$ por cada unidad de crecimiento de la variable independiente x.

Función Logarítmica

Definición

El modelo exponencial tiene la forma:

$$f(x) = log(x)$$

Con $x > 0$

Dominio y recorrido de la función logarítmica

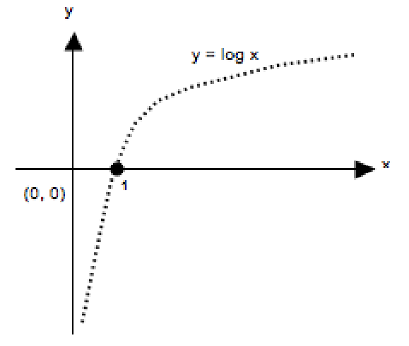
- Dominio: $Dom f = x \in (0, \infty)$
- Recorrido: $Rec f = y \in (-\infty, \infty)$

Función Logarítmica

Ceros de la función logarítmica

- Intersección con eje x: $(1, 0)$
- Intersección con eje y: no hay.

Gráfica de la función exponencial



Interés

Definición

En el ámbito de las finanzas el interés se refiere al valor del dinero en el tiempo. Esto es porque se considera al dinero como un bien que tiene un valor como cualquier otro. Así, si una persona pide prestado dinero a otra, debe pagar por el servicio una cierta cantidad conforme al monto del préstamo y al tiempo que empleará en devolverlo.

Tipos de Interés

- Interés simple. En este caso, se pacta un cierto $\%$ de interés fijo por período de tiempo, sin que este se sume a la cantidad adeudada.
- Interés compuesto. En este caso, se pacta un cierto $\%$ de interés fijo por período de tiempo, el que se suma a la cantidad adeudada.

Interés

Interés Simple

La fórmula de cálculo corresponde a la función lineal:

$$C = K(1 + it)$$

Donde: $K=$ capital inicial, $t=$ periodos, $C=$ capital acumulado, $i=$ tasa de interés simple, expresado en tanto por uno.

Ejemplo

Calcular el capital acumulado al cabo de tres meses, a una tasa de interés simple mensual del $10\,\%$, sobre un capital de $\$50{,}000$.
Solución: $K = 50000; t = 3$ meses, $i = \frac{10\,\%}{100} = 0,1$

$$C = 50000(1 + 0,1 \cdot 3)$$

$$C = 65000$$

Interés Compuesto

La fórmula de cálculo corresponde a la función exponencial:

$$C = K(1+i)^n$$

Donde: $K=$ capital inicial, $n=$ periodos, $C=$ capital acumulado, $i=$ tasa de interés compuesto, expresado en tanto por uno.

Ejemplo

Calcular el capital acumulado al cabo de tres meses, a una tasa de interés compuesto mensual del $10\,\%$, sobre un capital de $\$50{,}000$.

Solución: $K = 50000; n = 3$ meses, $i = \frac{10\,\%}{100} = 0,1$

$$C = 50000(1+0,1)^3$$

$$C = 66550$$