preunab

Congruencia, Semejanza y Proporcionalidad de Triángulos

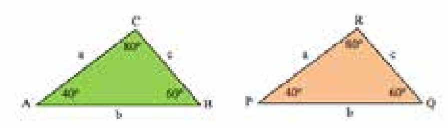
Clase # 16

Universidad Andrés Bello

Congruencia de triángulos

Definición

Dos triángulos son congruentes si tienen la misma forma y las mismas medidas.

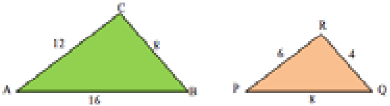


En la figura, $\triangle ABC = \triangle PQR$:

- Tienen la misma forma (triángulo)
- Tienen las mismas medidas de lados
- Tienen las mismas medidas de ángulos

Concepto de Semejanza

Dos triángulos son semejantes, cuando tienen la misma forma y las medidas de sus lados homólogos son proporcionales.



En la figura:

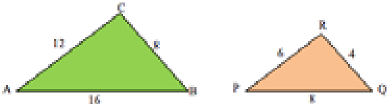
- Lado AB es homólogo con lado PQ.
- Lado BC es homólogo con lado QR.
- Lado AC es homólogo con lado PR.
- El ángulo BAC es homólogo con el ángulo QPR.
- El ángulo ABC es homólogo con el ángulo PQR.
- El ángulo BCA es homólogo con el ángulo QRP.

Semejanza de Triángulos

En la figura, $\triangle ABC \simeq \triangle PQR$, porque:

Sus lados homólogos son proporcionales.

$$\frac{16}{8} = \frac{12}{6} = \frac{8}{4} = 2$$



Razón de Semejanza

La razón de la proporción entre los lados de los triángulos, se llama razón de semejanza.
En el caso anterior, la razón de semejanza entre $\triangle ABC$ y $\triangle PQR$ es igual a 2.

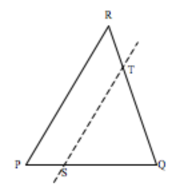
Segmentos proporcionales y semejanza de Triángulos

El teorema fundamental de semejanza de triángulos a partir del teorema de Thales:

> *" Toda paralela a uno de los lados de un triángulo, divide a los otros dos en segmentos proporcionales, por lo que forman un triángulo semejante al primero".*

En $\triangle PQR$ de la figura , si $\overline{TS}$ es paralelo a $\overline{RP}$, entonces:

$$\triangle PQR \simeq \triangle SQT$$

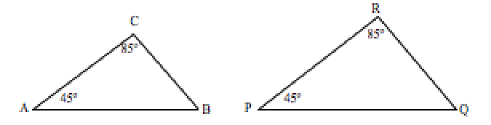


Criterios de Semejanza de Triángulos

Criterio AA: Ángulo – Ángulo

Dos triángulos son semejantes si tienen dos de sus ángulos homólogos iguales.

Ejemplo: En la figura, $\triangle ABC \simeq \triangle SQT$, porque $\angle A = \angle P$ y $\angle C = \angle R$



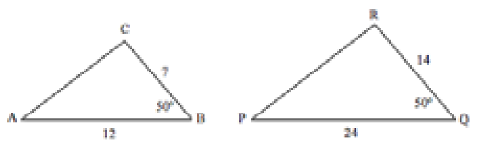
Importante:

En la nomenclatura de los triángulos semejantes deben coincidir los vértices que señalan lados y ángulos homólogos.
Con este caso coinciden A con P, B con Q y C con R.

Criterio LAL: Lado - Ángulo - Lado

Dos triángulos son semejantes si dos de sus lados homólogos son proporcionales y el ángulo que forman es congruente.

Ejemplo: En la figura, $\triangle ABC \simeq \triangle PQR$, porque $\angle B = \angle Q$ y $\dfrac{12}{24} = \dfrac{7}{14}$



Importante:

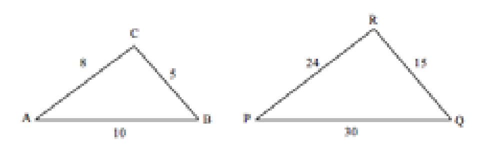
En la nomenclatura de los triángulos semejantes deben coincidir los vértices que señalan lados y ángulos homólogos.
Con este caso coinciden A con P, B con Q y C con R.

Criterios de Semejanza de Triángulos

Criterio LLL: Lado - Lado - Lado

Dos triángulos son semejantes si sus tres lados homólogos son proporcionales.

Ejemplo: En la figura, $\triangle ABC \simeq \triangle PQR$, porque $\dfrac{8}{24} = \dfrac{10}{30} = \dfrac{5}{15}$



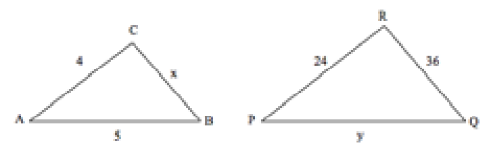
Importante:

En la nomenclatura de los triángulos semejantes deben coincidir los vértices que señalan lados y ángulos homólogos.
Con este caso coinciden A con P, B con Q y C con R.

Teorema:

Si dos triángulos son semejantes, sus lados homólogos son proporcionales.

Ejemplo: En la figura, $\triangle ABC \simeq \triangle PQR$, calcule x e y.



Como $\triangle ABC \simeq \triangle PQR$, se puede plantear la siguiente proporcionalidad:

$$\frac{4}{24} = \frac{5}{y} = \frac{x}{36}$$

Ejemplo: En la figura, $\triangle ABC \simeq \triangle PQR$, calcule x e y.

Como $\triangle ABC \simeq \triangle PQR$, se puede plantear la siguiente proporcionalidad:

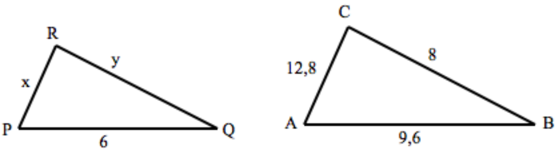
$$\frac{4}{24} = \frac{5}{y} = \frac{x}{36}$$

Despejando x: $\frac{4}{24} = \frac{x}{36} \rightarrow x = \frac{36 \cdot 4}{24} \rightarrow x = 6$

Despejando y: $\frac{4}{24} = \frac{5}{y} \rightarrow y = \frac{24 \cdot 5}{4} \rightarrow y = 30$

Ejercicio 1:

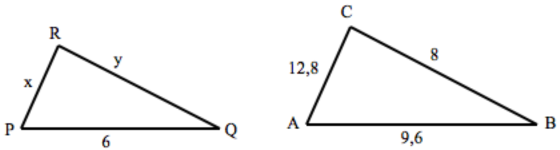
En la figura, PQR y ABC son triángulos semejantes Con los valores dados, la medida de $x + y$.



Ejercicios

Solución Ejercicio 1:

Si PQR y ABC son triángulos semejantes, entonces sus lados homólogos son proporcionales.

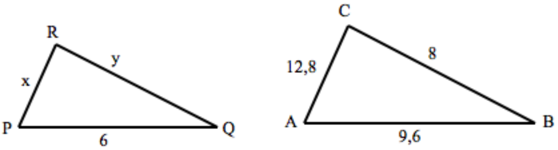


Solución Ejercicio 1:

Si PQR y ABC son triángulos semejantes, entonces sus lados homólogos son proporcionales.

$$\frac{x}{12,8} = \frac{6}{9,6}$$

$$\frac{y}{8} = \frac{6}{9,6}$$



Solución Ejercicio 1:

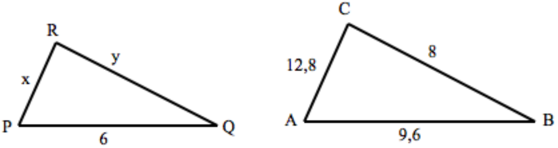
Si PQR y ABC son triángulos semejantes, entonces sus lados homólogos son proporcionales.

$$\frac{x}{12,8} = \frac{6}{9,6} \rightarrow x = 8$$

$$\frac{y}{8} = \frac{6}{9,6} \rightarrow y = 5$$

Entonces:

$$x + y = 13$$



Ejercicio 2:

Los lados de un triángulo ABC miden $18(cm)$., $21(cm)$. y $27(cm)$, respectivamente. Si en un triángulo PQR, semejante a ABC, el lado homólogo de PQR mide $12(cm)$, el lado mayor del triángulo PQR es:

Solución Ejercicio 2:

Los lados de un triángulo ABC miden $18(cm)$., $21(cm)$. y $27(cm)$, respectivamente. Si en un triángulo PQR, semejante a ABC, el lado homólogo de PQR mide $12(cm)$, el lado mayor del triángulo PQR es: Llamando a, b y c a los lados del triángulo PQR, se puede establecer la siguiente proporción:

$$\frac{18}{a} = \frac{21}{b} = \frac{27}{c}$$

(El lado mayor de PQR, es el correspondiente a 27)

Solución Ejercicio 2:

Los lados de un triángulo ABC miden $18(cm)$., $21(cm)$. y $27(cm)$, respectivamente. Si en un triángulo PQR, semejante a ABC, el lado homólogo de PQR mide $12(cm)$, el lado mayor del triángulo PQR es: Llamando a, b y c a los lados del triángulo PQR, se puede establecer la siguiente proporción:

$$\frac{18}{a} = \frac{21}{b} = \frac{27}{c}$$

$$\frac{18}{12} = \frac{27}{c}$$

Solución Ejercicio 2:

Los lados de un triángulo ABC miden $18(cm)$., $21(cm)$. y $27(cm)$, respectivamente. Si en un triángulo PQR, semejante a ABC, el lado homólogo de PQR mide $12(cm)$, el lado mayor del triángulo PQR es: Llamando a, b y c a los lados del triángulo PQR, se puede establecer la siguiente proporción:

$$\frac{18}{a} = \frac{21}{b} = \frac{27}{c}$$

$$\frac{18}{12} = \frac{27}{c}$$

$$c = \frac{12 \cdot 27}{18}$$

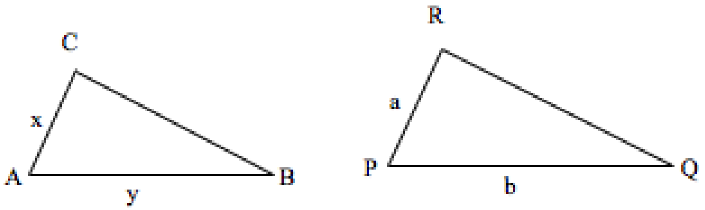
$$c = 18(cm)$$

Ejercicio 3:

En la figura, se ven los triángulos ABC y PQR .Es posible determinar si $\triangle ABC \simeq \triangle PQR$, sabiendo que:

$$(1) x = 3, y = 4, a = 6, b = 8$$

$$(2) \angle ABC = \angle PQR = 30^o$$



Ejercicios

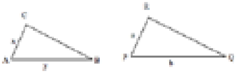
Ejercicio 3:

En la figura, se ven los triángulos ABC y PQR .Es posible determinar si $\triangle ABC \simeq \triangle PQR$, sabiendo que:

$$(1) x = 3, y = 4, a = 6, b = 8$$

$$(2) \angle ABC = \angle PQR = 30^o$$

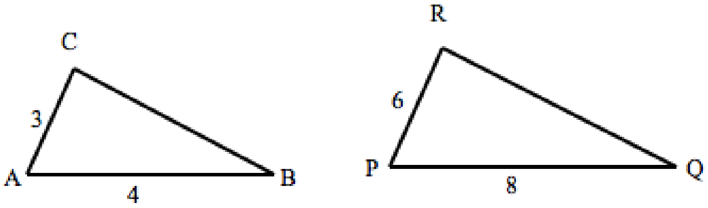
A) (1) por sí sola.
B) (2) por sí sola.
C)Ambas juntas (1) y (2)
D) Cada una por sí sola (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional



Solución Ejercicio 3:

Utilizando

(1) $x = 3, y = 4, a = 6, b = 8$

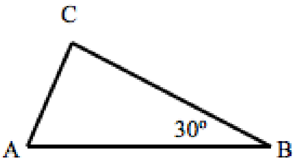


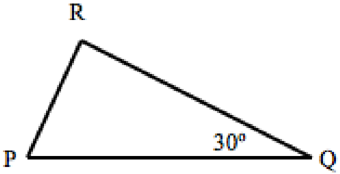
Conclusión:

Información insuficiente para cumplir con alguno de los criterios de semejanza.

Solución Ejercicio 3:

Utilizando
$(2)\angle ABC = \angle PQR = 30^o$





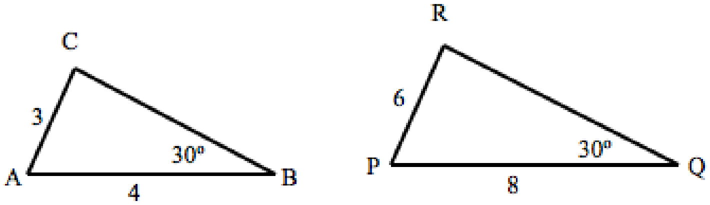
Conclusión:

Información insuficiente para cumplir con alguno de los criterios de semejanza.

Solución Ejercicio 3:

Utilizando ambas juntas

(1) y (2)$\angle ABC = \angle PQR = 30^o$



Conclusión:

Información insuficiente para cumplir alguno de los criterios de semejanza. No es posible aplicar el criterio L-A-L, ya que este requiere conocer la medida del ángulo entre los dos lados conocidos, y este no es el caso. **Alternativa E**