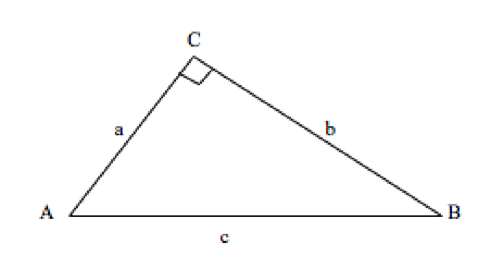
preunab

Teorema de Euclides

Clase # 17

Universidad Andrés Bello

Teorema general de Pitágoras para el triángulo rectángulo



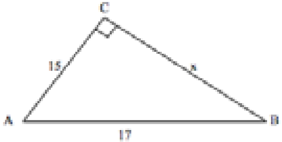
Si ABC es triángulo rectángulo en C, con a y b, catetos, y c hipotenusa, entonces:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Teorema de Pitágoras

Ejemplo

En la figura, ABC rectángulo en C. Con las medidas dadas, el valor del cateto x es igual a:



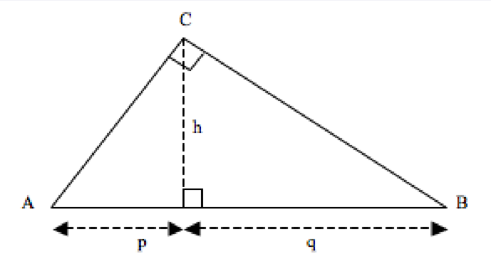
Aplicando Pitágoras:

$$15^2 + x^2 = 17^2 \rightarrow x^2 = 17^2 - 15^2$$

$$x^2 = 64 \rightarrow x = \pm 8$$

Se considera 8 positivo, porque x representa el cateto del triángulo.

Teorema de Euclides para la altura del triángulo rectángulo:

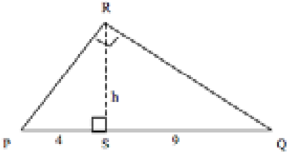


Si ABC es triángulo rectángulo en C, y h su altura, que define sobre la hipotenusa los segmentos p y q, entonces:

$$h^2 = p \cdot q$$

Ejemplo

En la figura, PQR es triángulo rectángulo en R. Calcular la altura h:



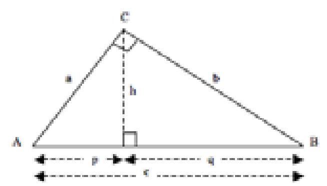
Aplicando el teorema de Euclides:

$$h^2 = 4 \cdot 9 \rightarrow h^2 = 36$$

$$h = \pm 6$$

Se considera 6 positivo, porque h representa la altura del triángulo.

Teorema de Euclides y los lados del triángulo rectángulo



Si ABC es triángulo de catetos a y b e hipotenusa c, rectángulo en C y h es altura, entonces, según el teorema de Euclides se cumple que:

$$a^2 = p \cdot (p + q)$$

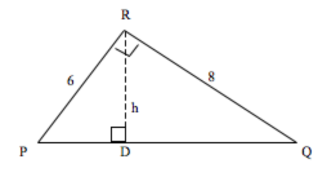
$$b^2 = q \cdot (p + q)$$

Además:

$$h = \frac{a \cdot b}{c}$$

Ejemplo:

En la figura, PQR es triángulo rectángulo en R. Si $\overline{PR} = 6$ y $\overline{QR} = 8$, calcular la altura h.



Solución: Por el teorema de Pitágoras se calcula $\overline{PQ}$:

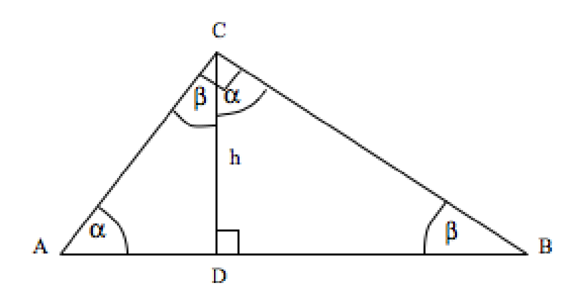
$$\overline{PQ} = \sqrt{6^2 + 8^2} \rightarrow \overline{PQ} = 10$$

Entonces, por el teorema de Euclides:

$$h = \frac{6 \cdot 8}{10} \rightarrow h = 4,8$$

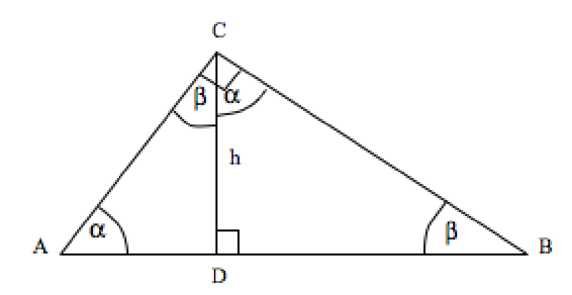
Teorema de Euclides y proporcionalidad en el triángulo rectángulo

En la figura, ABC es triángulo rectángulo en C, y h su altura proyectada sobre la hipotenusa.



Si en un triángulo ABC rectángulo en C se traza la altura $\mathbf{h}$ correspondiente a la hipotenusa, los triángulos rectángulos que resultan son semejantes entre sí y semejantes al triángulo dado.

Esto es:

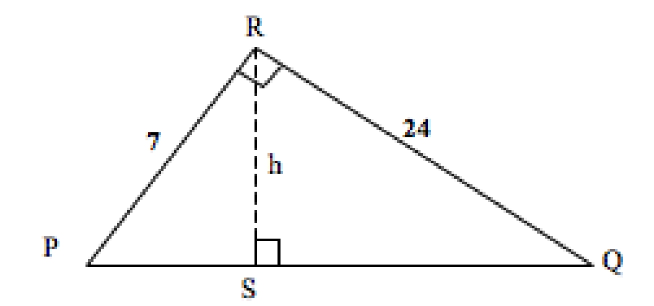


$\bullet \triangle ADC \backsim \triangle CDB \quad \bullet \triangle ADC \backsim \triangle ACB \quad \bullet \triangle CDB \backsim \triangle ACB$

Es decir, se cumplen las proporcionalidades:

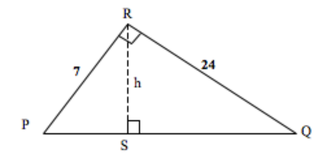
- $\dfrac{\overline{AD}}{h} = \dfrac{h}{\overline{DB}}$
- $\dfrac{\overline{AD}}{h} = \dfrac{h}{\overline{DB}}$
- $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AC}}$

Ejemplo: En la figura, PQR es triángulo rectángulo en R.



Si $\overline{PR} = 7$ y $\overline{QR} = 24$, calcule $\overline{PQ}$ y h. Además, calcule $\overline{PS}$ aplicando semejanza de triángulos.

Ejemplo: En la figura, PQR es triángulo rectángulo en R.



Si $\overline{PR} = 7$ y $\overline{QR} = 24$, calcule $\overline{PQ}$ y h. Además, calcule $\overline{PS}$ aplicando semejanza de triángulos.

$\overline{PQ}$ puede ser calculado mediante el teorema de Pitágoras

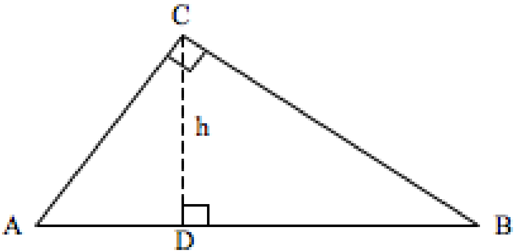
$$\overline{PQ} = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$$

Ahora, para calcular la altura h:

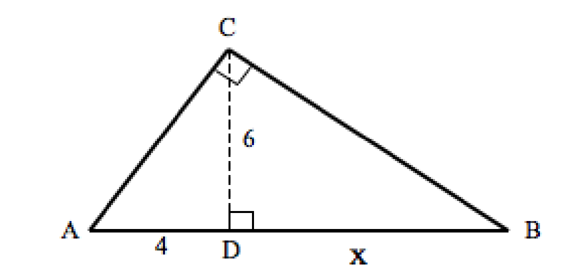
$$\frac{\overline{PS}}{6,72} = \frac{7}{24} \rightarrow \overline{PS} = \frac{6,72 \cdot 7}{24} = 1,96$$

Ejercicio 1:

En la figura, ABC triángulo rectángulo en C, con altura $h = 6cm$. Si $\overline{AD} = 4$, el valor de $\overline{DB}$ es:



Solución: Incorporamos los datos en la figura



Aplicando el Teorema de Euclides:

$$6^2 = 4x$$

$$x = \frac{36}{4}$$

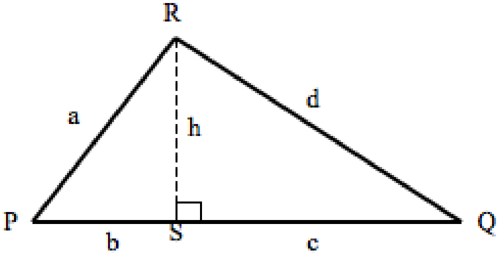
$$x = 9cm$$

Ejercicio 2:

En la figura, PQR triángulo escaleno, con altura h. Es posible determinar si PQR es o no rectángulo en R, si:

$$(1) h : b = c : h$$

$$(2) a + d > b + c$$



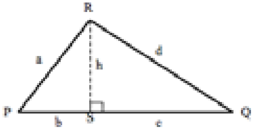
Ejercicio 3:

En la figura, se ven los triángulos ABC y PQR .Es posible determinar si $\triangle ABC \simeq \triangle PQR$, sabiendo que:

$$(1) h : b = c : h$$

$$(2) a + d > b + c$$

A) (1) por sí sola.
B) (2) por sí sola.
C)Ambas juntas (1) y (2)
D) Cada una por sí sola (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

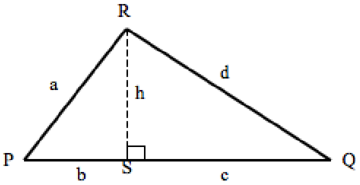


Solución Ejercicio 3:

Utilizando

(1) $h : b = c : h$

Si se despeja h, queda: $h^2 = b \cdot c$, que es el teorema de Euclides, válido para triángulos rectángulos.

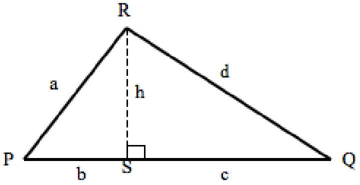


Conclusión:

Por lo tanto (1) por sí misma, permite lo solicitado

Solución Ejercicio 3:

Utilizando
(2) $(2)a + d > b + c$
Este enunciado, aunque es verdadero para todo triángulo, no permite establecer si R es o no ángulo recto.

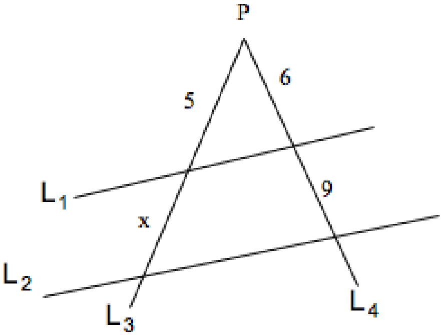


Conclusión:

Por lo tanto (2) por sí sola, no permite determinar lo solicitado. La alternativa correcta es A.

Ejercicio 1:

En la figura, $L1$ y $L2$ son rectas paralelas intersectadas por las transversales $L3$ y $L4$, que a su vez se intersectan en P. Con los valores de la figura encuentre el valor de x.



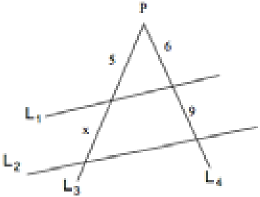
Solución:

De acuerdo a la figura, se trata de proporcionalidad de trazos, solucionable mediante el teorema de Thales.

$$\frac{5}{6} = \frac{x}{9}$$

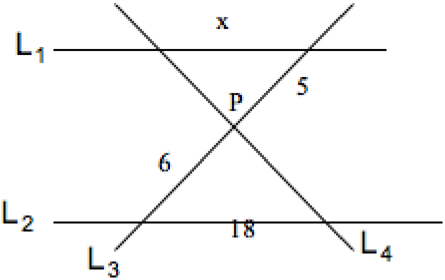
$$\frac{5 \cdot 9}{6} = x$$

$$\frac{15}{2} = x$$



Ejercicio 2:

En la figura, $L1$ y $L2$ son rectas paralelas. Las transversales $L3yL4$ se intersectan en P. Con los valores dados en la figura, encuentre el valor de x



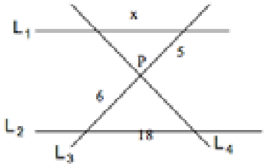
Solución:

De acuerdo a la figura, se trata de proporcionalidad de trazos mediante el teorema de Thales.

$$\frac{5}{x} = \frac{6}{18}$$

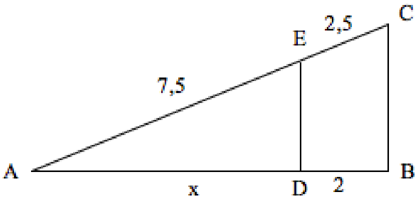
$$x = \frac{90}{6}$$

$$x = 15$$



Ejercicio 3:

En la figura, ABC es triángulo. Si $\overline{DE}$ es paralelo a $\overline{BC}$, entonces, con los valores dados, la medida de x, es:



Solución:

Como $DE//BC$, es aplicable el teorema de Thales:

$$\frac{2,5}{2} = \frac{7,5}{x}$$

$$x = \frac{15}{2,5}$$

$$x = 6$$