Ecuación de la Recta en el Espacio

Clase # 21

Universidad Andrés Bello

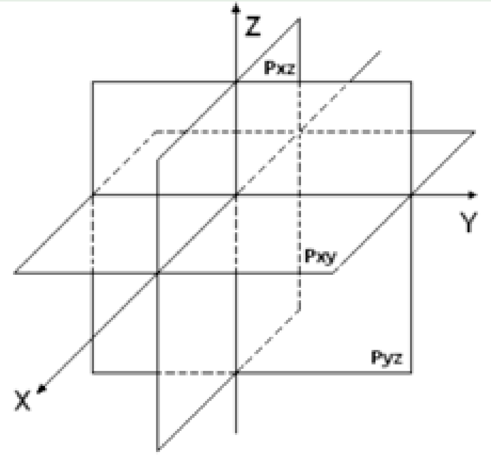
Definición

Un sistema de coordenadas rectangulares en el espacio está determinado por tres planos mutuamente perpendiculares, Los ejes generalmente son identificados por letras X, Y, Z y se habla frecuentemente del eje X, del eje Y y del eje Z, donde:

- El eje X es la recta determinada por la intersección de los planos P_{xy} y P_{xz}.
- El eje Y es la recta determinada por la intersección de los planos P_{xy} y P_{yz}.
- El eje Z es la recta determinada por la intersección de los planos P_{xz} y P_{yz}.

Planos Coordenados:

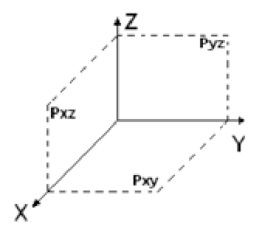
Los planos P_{xy}, P_{xz}, P_{yz}, que se cortan en un mismo punto O, como se presenta en la siguiente imagen:



Planos Coordenados:

- El plano coordenado XY que denotaremos por P_{xy}, es determinado por las rectas: eje X y eje Y.
- El plano coordenado XZ que denotaremos por P_{xz}, es determinado por las rectas: eje X y eje Z.
- El plano coordenado YZ que denotaremos por P_{yz}, es determinado por las rectas: eje Y y eje Z.

Los planos coordenados dividen al espacio tridimensional en 8 sub-espacios llamados octantes.



Distancia entre dos Puntos

La distancia entre dos puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ del espacio tridimensional está dado por:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Ejemplo

La distancia entre los $A(3, -2, 5)$ y $B(3, 1, 7)$ es:

$$d(A, B) = \sqrt{(3 - 3)^2 + (1 - (-2))^2 + (7 - 5)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{13}$$

Punto Medio

El punto medio determinado por dos puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ del espacio tridimensional está dado por:

$$P_m(P_1, P_2) = \left(\frac{x_2 + x_1}{2} + \frac{y_2 + y_1}{2} + \frac{z_2 + z_1}{2} \right)$$

Ejemplo

Las coordenadas del punto medio del segmento que determinan los puntos $A(3, -2, 5)$ y $B(3, 1, 7)$ es:

$$P_m = \left(\frac{3+3}{2} + \frac{-2+1}{2} + \frac{5+7}{2} \right)$$

$$P_m = \left(3, \frac{-1}{2}, 6 \right)$$

Vectores Unitarios

Se definen los vectores unitarios:

- $\hat{i} = (1, 0, 0)$, en dirección positiva del eje x
- $\hat{j} = (0, 1, 0)$, en dirección positiva del eje y
- $\hat{k} = (0, 0, 1)$, en dirección positiva del eje z

Los vectores asociados con las direcciones de los ejes coordenados cartesianos x, y, z se designan por $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$, respectivamente. Los vectores cartesianos permiten expresar analíticamente los vectores por medio de los vectores unitarios.

Ejemplo

La expresión analítica del vector $v = (-3, 5 - 2)$

$$v = -3\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$$

Ecuaciones de la recta en el espacio

En función de su posición relativa, existen dos tipos de puntos: colineales y coplanarios. Los denominados colineales son aquellos contenidos en una recta, no importando cuantos puntos sean mientras estén alineados y dentro de la recta. Se denominan puntos coplanarios a aquellos que están contenidos en un mismo plano.

Ejemplo

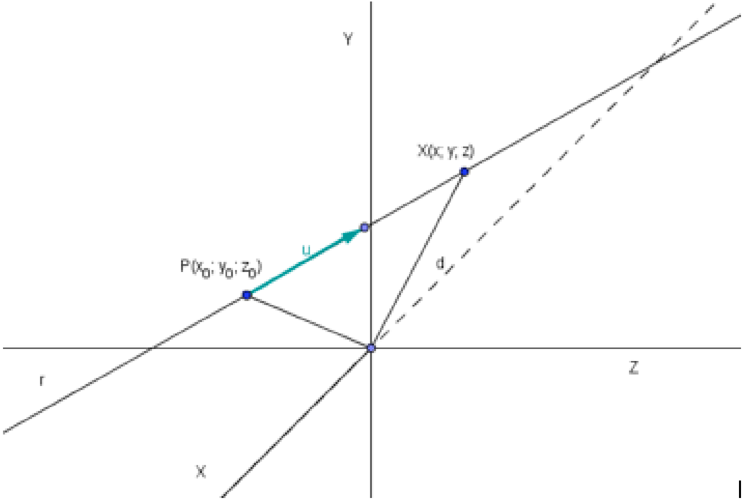
Comprobar si los puntos $A(1,2,3)$, $B(1,-2,4)$ y $C(1,-3,5)$ están alineados: Si los puntos están alineados, los vectores tienen la misma dirección y sus componentes son proporcionales:

$$\overline{AB} = (1-1, -2-2, 4-3) = (0, -4, 1)$$

$$\overline{AC} = (1-1, -3-2, 5-3) = (0, -5, 2)$$

Con esto las razones son: $\dfrac{-4}{-5} \neq \dfrac{1}{2}$. No están alineados.

Ecuación Vectorial de la Recta



Ecuación Vectorial de la Recta

Un vector director u, es un vector que da la dirección de una recta y también la orienta, es decir le da un sentido determinado.
Sea $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto de la recta r y $u = (u_1, u_2, u_3)$ su vector director. Para cualquier otro punto $X(x, y, z)$, de la recta r, el vector PX tiene igual dirección que u , luego es igual u multiplicado por un escalar: $PX = \lambda \cdot u$

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \lambda \cdot (u_1, u_2, u_3)$$

$$(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) = \lambda \cdot (u_1, u_2, u_3)$$

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \cdot (u_1, u_2, u_3)$$

Es decir, una recta L, está formada por el conjunto de puntos, tales que:

$$L = \{x \in \mathbb{R}^3 / x = P + \lambda u\}$$

Ecuaciones Paramétricas de la Recta

Operando en la ecuación vectorial de la recta llegamos a la igualdad:

$$(x, y, z) = (x_0 + \lambda u_1; y_0 + \lambda u_2; z_0 + \lambda u_3)$$

Esta igualdad se verifica si:

$$x = x_0 + \lambda u_1; y = y_0 + \lambda u_2; z = z_0 + \lambda u_3$$

Ecuaciones Continuas de la Recta

Despejando e igualando λ en las ecuaciones paramétricas se tiene:

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}$$

Ejercicio 1

La ecuación de la recta que pasa por el punto $(8, 2, 3)$ y lleva la dirección del vector $\hat{j}$

Solución:

El punto por el cual pasa la recta es el punto $A(8, 2, 3)$, siendo el vector director el vector $\hat{j} = (0, 1, 0)$, entonces:

$$x = 8$$

$$y = 2 + \lambda$$

$$z = 3$$

La ecuación paramétricas, en forma continua, de la recta que pasa por los puntos $A(1,0,1)$ y $B(0,1,1)$ es:

Solución:
Determinamos el vector director
$\overline{AB} = (0-1, 1-0, 1-1) = (-1, 1, 0)$.
Consideramos el punto (x_0, y_0, z_0) , el punto $A(1,0,1)$, y finalmente reemplazamos en la expresión, obteniendo:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{0}$$