preunab

TRANSFORMACIONES ISOMETRICAS

Clase # 22

Universidad Andrés Bello

Concepto de Isometrías:

Las transformaciones isométricas son movimientos que se aplican a figuras geométricas, produciendo cambios de posición, pero no de tamaño ni de forma.

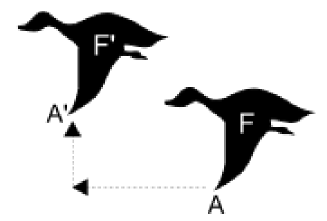
Tipos de Isometrías:

- Traslaciones
- Rotaciones
- Simetrías

Traslación

Movimiento que desliza o mueve una figura, reproduciendo su diseño y manteniendo su forma, tamaño y posición. Una traslación mantiene sus lados de igual medida y paralelos a los de la figura de origen.

La figura representa una traslación de la figura desde F a F'.



La figura F' es el homólogo de F, producto de la traslación.

Vector Traslación

En un sistema coordenado, una traslación se denota como un vector (x, y), en el cual la componente x corresponde a unidades de desplazamiento horizontal (eje x) y la componente y a unidades de desplazamiento vertical (eje y).
En general, un vector de traslación se denota por:

$$(x, y) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$$

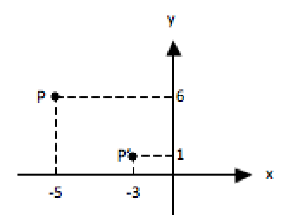
$$\begin{cases} x > 0 \rightarrow Desplazamiento\ hacia\ la\ derecha\ x\ unidades \\ x < 0 \rightarrow Desplazamiento\ hacia\ la\ izquierda\ x\ unidades \\ x = 0 \rightarrow Sin\ desplazamiento \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > 0 \rightarrow Desplazamiento\ hacia\ arriba\ x\ unidades \\ y < 0 \rightarrow Desplazamiento\ hacia\ abajo\ x\ unidades \\ y = 0 \rightarrow Sin\ desplazamiento \end{cases}$$

TIPOS DE ISOMETRÍAS

Ejemplo

En el plano coordenado de la figura, el punto P se desplaza a P'. ¿Cuál es su vector de traslación?



Solución:

Las coordenadas son: $P = (-5, 6)$ y $P' = (-3, 1)$.

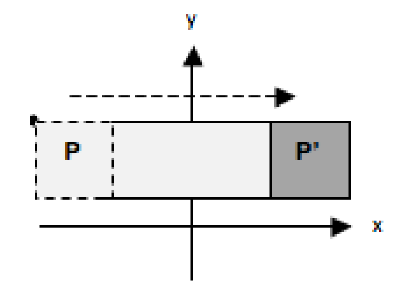
• La coordenada x pasó de un valor -5 a un valor -3, lo que significa que se desplazó 2 unidades a la derecha.

• La coordenada y pasó de un valor 6 a un valor 1, lo que significa que se desplazó 5 unidades hacia abajo.

El vector de traslación es, por lo tanto: $(2, -5) = 2\hat{\imath} - 5\hat{\jmath}$

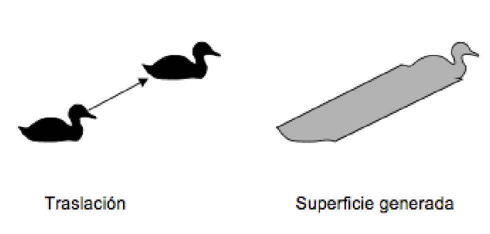
Superficies por traslación de figuras

Ejemplo 1:
Un cuadrado P al trasladarse en sentido horizontal solamente hasta P', genera, en su recorrido, un rectángulo.



Ejemplo 2

Una figura compleja, al trasladarse, genera una superficie irregular.



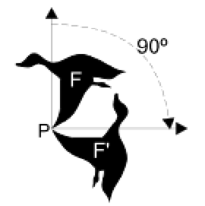
TRANSFORMACONES ISOMÉTRICAS

Rotaciones:

Una rotación es un movimiento de giro de una figura en torno a un punto, denominado centro de rotación. Una rotación transforma la figura original, manteniendo su forma y tamaño, pero cambiando su posición.

Ejemplo:

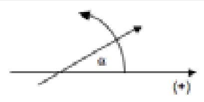
La figura F experimenta una rotación de 90^o en sentido de los punteros del reloj, con centro en el punto P.

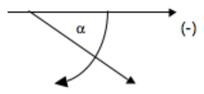


La figura F' es el homólogo de F, producto de la rotación.

Elementos de una rotación en el plano:

• Magnitud del giro: Medida del ángulo determinado por un punto cualquiera de la figura original, el punto de rotación como vértice y el punto correspondiente en la transformación obtenida.
• Sentido de giro: Puede ser negativo u horario (en sentido de los punteros del reloj), o positivo o antihorario (en sentido contrario a las manecillas del reloj),

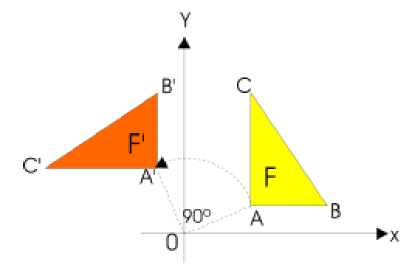




• Un centro de rotación (P): Es un punto del plano elegido como centro de rotación.

Ejemplo:

En la figura, el triángulo F, con vértices A, B y C, es girado en 90^o en sentido antihorario, con centro en el origen O, obteniendo su homólogo F'.



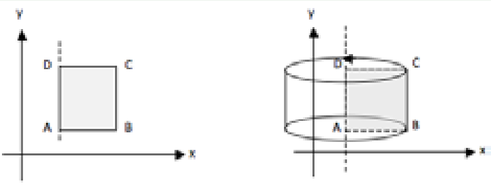
Cada punto de F tiene su homólogo en F', ubicado en un arco de circunferencia de 90^o con centro en O.

Volúmenes a partir de rotación en el espacio de figura planas:

Toda figura plana que rota en el espacio en torno de un eje, genera un volumen.

Ejemplo:

En la figura, un rectángulo $ABCD$, con lados paralelos al eje de coordenadas, realiza un giro de 360^o con eje en su lado AD. En estas condiciones, genera un cilindro de radio AB y altura AD.

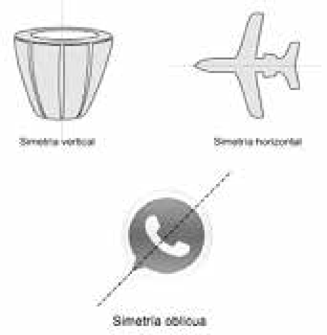


El volumen V del cilindro obtenido es:
$V = \pi r^2 \cdot h$, siendo el radio $r = AB$ y la altura $h = AD$.

Simetrías:

Ejes de simetría: Un eje de simetría es una recta que divide una figura en 2 partes congruentes, siendo una la imagen especular de la otra. De ese modo, si pudiera doblarse la figura por el eje de simetría, ambas partes coincidirían perfectamente.

Ejemplo:



Ejes de simetría en figuras geométricas:

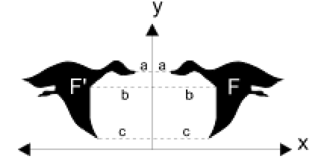
FIGURA	Número de ejes de simetría
Triángulo escaleno	Ninguno
Trapecio isósceles	1
Rectángulo	2
Rombo	2
Triángulo equilátero	3
Cuadrado	4
Pentágono regular	5

Simetría con respecto a un eje (simetría axial):

Movimiento que conserva la forma y el tamaño de la figura, pero cambia su posición.
Dos puntos simétricos, tienen igual distancia al eje de simetría, el segmento que une ambos puntos es perpendicular al mismo eje.

Ejemplo:

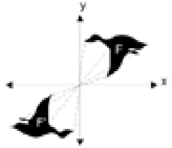
La figura F' es el reflejo de F respecto de un eje vertical.



La figura F' es el homólogo de F, producto de la simetría.
Importante: Una simetría axial equivale a una rotación en el espacio.

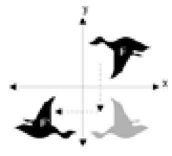
Simetría con respecto a un punto (simetría puntual):

Para hallar la simetría con respecto a un punto se debe prolongar, en igual distancia, la recta



Importante:

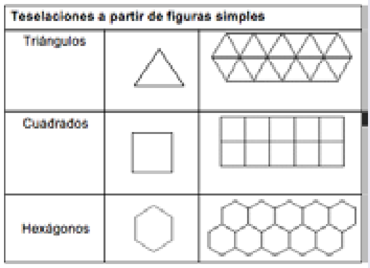
Una simetría puntual equivale a dos simetrías sucesivas. Una respecto de un eje vertical y otra respecto de un eje horizontal.



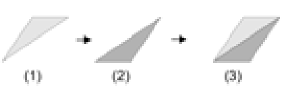
TRANSFORMACONES ISOMÉTRICAS

Teselaciones (embaldosados):

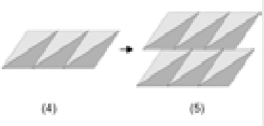
Una teselación es una configuración geométrica obtenida por el acoplamiento de una figura o pieza de base, que se repite invariablemente, con o sin transformaciones isométricas, hasta cubrir completamente un plano, sin dejar espacios ni sobreposiciones.
Las teselaciones han sido utilizadas en todo el mundo desde los tiempos más antiguos para recubrir suelos y paredes, e igualmente como motivos decorativos de muebles, alfombras, tapices, vestuario, tal como lo muestran las figuras siguientes:



Ejemplo: Teselación a partir de un triángulo escaleno.



(1) Triángulo escaleno cualquiera.
(2) Homólogo del triángulo (1), obtenido por simetría.
(3) Figura obtenida por traslación de (1) y (2), para formar una figura base.



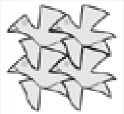
(4) Figura obtenida por traslación de la figura (3).
(5) Figura obtenida por traslación de la figura (4).

(6) Una de las tantas teselaciones que se pueden obtener.

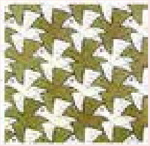
Transformaciones isométricas y arte

M. C. Escher es, probablemente, el más famoso de todos ellos. El artista holandés teseló el plano con figuras de intrincadas formas.

Una figura básica utilizada por Escher es la siguiente:



Al teselar la figura, por traslación, se va formando una superficie perfectamente cubierta:



El resultado final es el siguiente:

Ejercicio 1:

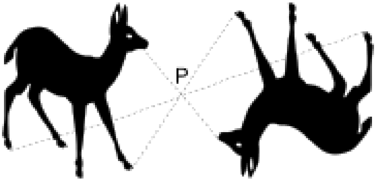
La figura F' se obtuvo a partir de la figura F, mediante:

A) Traslación de F en un vector $(x\hat{\imath}, y\hat{\jmath})$.
B) Simetría de F respecto de un eje vertical.
C) Simetría de F respecto de un eje horizontal.
D) Simetría de F respecto de un punto.
E) Rotación de 90^o respecto de un punto.

EJERCICIOS

Solución Ejercicio 1:

Se trata de una simetría puntual, tal como muestra la figura siguiente.

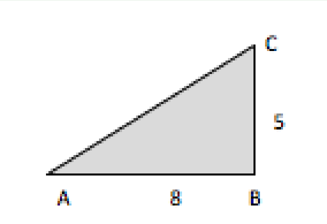


Conclusión:

Alternativa correcta: D.

Ejercicio 2:

En la figura, ABC triángulo rectángulo en B, y catetos 5 y 8.
Es posible calcular el volumen generado por una rotación del triángulo en el espacio, sabiendo que:

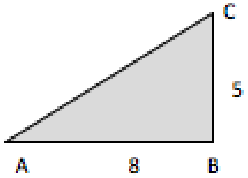


(1) El ángulo de rotación es de 180^o
(2) El eje de rotación es el cateto $\overline{AB}$

A) (1) por sí sola.
B) (2) por sí sola.
C)Ambas juntas (1) y (2)
D) Cada una por sí sola (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

Solución Ejercicio 2:

(1) El ángulo de rotación es de 180^o
Aún conociendo la medida de los lados del triángulo y el ángulo de rotación en el espacio, no es posible calcular la medida del volumen generado, sin saber su eje de rotación.

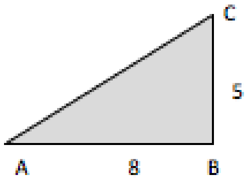


Conclusión:

Por lo tanto (1) por sí sola no es suficiente para el cálculo.

Solución Ejercicio 2:

(2) El eje de rotación es el cateto $\overline{AB}$.
Aún conociendo la medida de los lados del triángulo y el eje de rotación, no es posible calcular la medida del volumen generado sin saber el ángulo rotación.



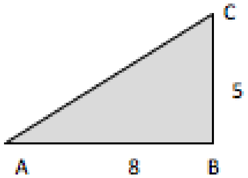
Conclusión:

Por lo tanto (2) por sí sola no es suficiente para el cálculo.

EJERCICIOS

Solución Ejercicio 2:

C) Ambas juntas (1) y (2)
Se conocen las medidas de los lados del triángulo, el ángulo de rotación y el eje de rotación.



Conclusión:

Con estos datos se puede determinar que se trata del volumen de $\frac{1}{2}$ cono de radio 5 y altura 8. **Alternativa correcta: C**