INTERSECCIÓN Y UNIÓN DE ÁREAS Y VOLÚMENES

Clase # 23

Universidad Andrés Bello

ÁREAS SOMBREADAS (ACHURADAS):

Corresponde esta clase al cálculo de áreas de diferentes figuras relacionadas entre sí, generando intersecciones y uniones entre ellas. Para distinguir la parte que se debe calcular:

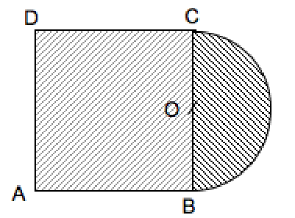
1. Se procede a sombrearla, es decir, se pinta o raya imitando texturas.
2. Se identifican las figuras simples que componen la figura original.
3. Se lleva la situación al cálculo de sumas y restas de áreas de cuadrados, rectángulos, etc.

SUMA DE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

Algunas veces, la parte achurada está formada por la unión de áreas de figuras. Por lo tanto, hay que descomponerla, luego hacer el cálculo de cada parte, y finalmente, sumarlas para encontrar el área total.

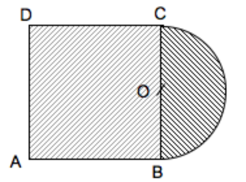
Ejemplo

En la figura, $ABCD$ cuadrado de lado $4cm.$ y BC es un arco de semicírculo de centro O, con $\overline{OB} = \overline{OC}$. Calcule el área de la región sombreada



Solución Ejemplo

Esta figura se descompone en un cuadrado y medio círculo.



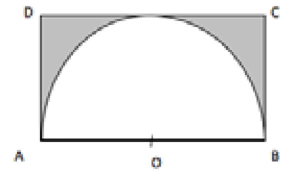
- Lado del cuadrado $= 4cm$.
- Área del cuadrado: $A = 4^2 = 16cm^2$.
- Radio del círculo $= 2cm$.
- Área del círculo: $A = \pi \cdot 2^2 = 4\pi cm^2$
- Área del semicírculo: $A = \dfrac{1}{2} \cdot 4\pi = 2\pi cm^2$
- El área de la figura es: Área total $= 2\pi + 16 = 2(\pi + 8)cm^2$.

RESTA DE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

En este tipo de ejercicios hay figuras dentro de otras, produciendo intersecciones entre ellas. La solución se encuentra buscando la diferencia entre las figuras que forman el sector sombreado.

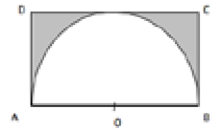
Ejemplo

En la figura siguiente, $ABCD$ rectángulo de lado $AB = 12cm$. con semicírculo de diámetro AB inscrito. Calcule el área de la región sombreada



Solución Ejemplo

El área sombreada es igual al área del rectángulo menos el área del semicírculo.



- El área del rectángulo es $AB \cdot BC$. Pero BC mide lo mismo que el radio de la semicircunferencia, por lo tanto el área es: $12 \cdot 6 = 72cm^2$
- El área del semicírculo es: $(\pi r^2 : 2) = 18\pi cm^2$.

El área sombreada queda determinada por la diferencia entre el área del rectángulo y el área del semicírculo:

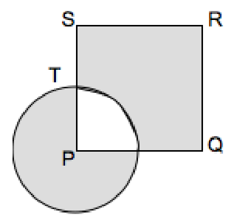
$$72 - 18\pi = 18(4 - \pi)cm^2$$

INTERSECCIÓN DE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

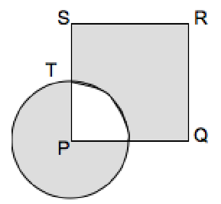
Hay casos en los que las intersecciones de figuras determinan sumas y restas de áreas.

Ejemplo

En la figura, P es el centro del círculo de radio PT y $PQRS$, cuadrado. Además, $PT = ST$. Si X representa el área del círculo e Y representa el área del cuadrado, entonces, la expresión, en función de X e Y, que representa el área de la superficie sombreada es.



Solución Ejemplo



- Área sombreada $= \frac{3}{4}$ Área círculo $+$ Área cuadrado -$\frac{1}{4}$ Área círculo
- Área sombreada $= \frac{1}{2}$ Área círculo $+$ Área cuadrado .

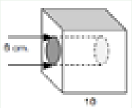
Area Sombreada $= \frac{1}{2}X + Y$. Es la expresión solicitada.

RELACIONES EN CUERPOS GEOMÉTRICOS

Así como en el caso de las áreas de figuras planas, es posible estudiar la relación entre cuerpos geométricos que generan uniones o intersecciones, como por ejemplo, una esfera inscrita en un cubo. Al igual que en el caso de figuras planas, la estrategia de resolución de problemas de esta índole, es esquematizar y reducir los cuerpos a cuerpos simples, tales como cubos, cilindros, esferas, etc.

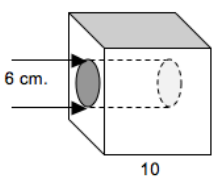
Ejemplo

Al cubo de $10cm$. de arista de la figura, se le ha hecho una perforación de sección circular, perpendicular a una de sus caras, de $6cm$. de diámetro. Si la perforación atraviesa completamente el cubo, encuentre el volumen del cuerpo resultante.



Solución Ejemplo

El volumen del cuerpo resultante es igual al volumen del cubo de arista 10, menos el volumen de un cilindro de radio $3cm$. y altura $10cm$, que es el volumen de la perforación.

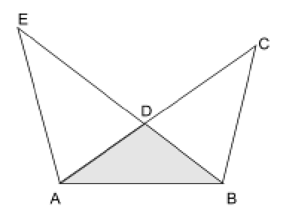


- El volumen del cubo es: $V_{cubo} = 10^3 = 1000cm^3$.
- El volumen del cilindro es: $V_{cilindro} = \pi \cdot 3^2 \cdot 10 = 90\pi cm^3$.

La diferencia es igual a $V = 1000 - 90\pi = 10(100 - 9\pi)cm^3$.

Ejercicio 1:

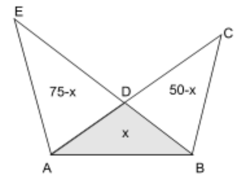
En la figura, el área del polígono $ABCDE$ es igual a $120cm^2$, el área del triángulo ABC es igual a $50cm^2$ y el área del triángulo ABE es $75cm^2$. Entonces, al área de la región sombreada es igual a:



A) $5cm^2$
B) $15cm^2$
C) $20cm^2$
D) $25cm^2$
E) $45cm^2$

Solución Ejercicio 1:

Llamando x a la región sombreada, se pueden trasladar los siguientes datos a la figura:



Sumando las áreas parciales representadas por los triángulos ADE, ABD y BCD, se tiene que:

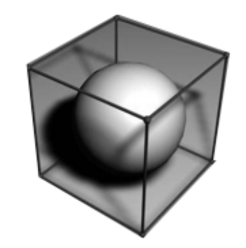
$$(75 - x) + x + (50 - x) = 120$$

$$125 - x = 120$$

$$x = 5cm^2$$

Ejercicio 2:

En la figura, se ha introducido una esfera de diámetro d en un cubo de arista a. Es posible determinar la expresión numérica del cuociente entre ambos cuerpos sabiendo que:



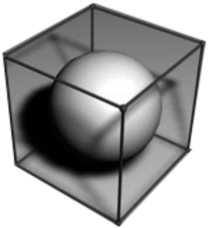
(1) $d = 10cm$
(2) $d = a$

A) (1) por sí sola.
B) (2) por sí sola.
C)Ambas juntas (1) y (2)
D) Cada una por sí sola (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

Solución Ejercicio 2:

(1) $d = 10cm$

Se sabe que el diámetro de la esfera es $10cm$, lo que permite calcular su volumen, pero no se tienen datos acerca de las medidas del cubo.



Conclusión:

Por lo tanto, (1) por sí sola, no resuelve el problema planteado.

Solución Ejercicio 2:

(2) $d = a$.
Si $d = a$ significa que si r es el diámetro de la esfera y la arista del cubo es $2r$.
El volumen de la esfera es $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ y el del cubo es
$V_{cubo} = (2r)^3 = 8r^3$
Al realizar el cuociente entre ambas expresiones, se simplifica r^3 , quedando una expresión numérica independiente del valor de r.

Conclusión:

Por lo tanto, (2) por sí sola, lleva a la solución, sin necesidad del dato de (1).
Alternativa correcta: B.