Operatoria con Potencias y Raíces

Clase # 3

Universidad Andrés Bello

Definición

Se llama potencia a una expresiń de la forma , donde a es la base y n es el exponente.

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot a$$

Potencia de Exponente Entero

Cuando el exponente es un número entero n, este indica las veces que aparece a multiplicando, siendo a un número cualquiera:

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$a^2 = a \cdot a$$

$$a^3 = a \cdot a \cdot a$$

Multiplicación de Potencias de Igual Base

Se conserva la base y se suman los exponentes.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

División de Potencias de Igual Base

Se conserva la base y se restan los exponentes.

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

Esto viene dado desde la multiplicación de potencias de igual base, observe:

$$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^n \cdot \frac{1}{a^m} = a^n \cdot a^{-m} = a^{n-m}$$

Potencia de un Producto

La potencia de un producto es igual al producto de cada uno de los factores elevado al mismo exponente:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Potencia de un cuociente

La potencia de un cociente es igual al cociente de cada uno de los números elevado al mismo exponente.

$$(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Potencia de una Potencia

Se conserva la base y se multiplican los exponentes.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Potencia de Exponente Cero

Toda potencia de exponente cero es igual a 1. Existen variadas formas de explicar, veremos en esta ocasión una de ellas:

$$a^0 = a^{1-1} = a^1 \cdot a^{-1} = a^1 \cdot \frac{1}{a^1} = \frac{a^1}{a^1} = 1$$

Potencia de Exponente Negativo

Una base con exponente negativo, $-n$, es igual al inverso de la potencia de base a y exponente positivo n:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Potencia de 10

En general, la potencia 10^n es igual a la unidad seguida de n ceros.

$$10^0 = 1$$

$$10^1 = 10$$

$$10^2 = 100$$

Potencia de 10 de Exponente Negativo

En general, la potencia 10^{-n} es igual a la unidad precedida de n ceros detrás de una coma decimal.

$$10^{-0} = 1$$

$$10^{-1} = 0,1$$

$$10^{-2} = 0,01$$

Notación Científica

La notación científica es una manera de representar un número utilizando potencias de base diez. Esta notación se utiliza para poder expresar abreviadamente números muy grandes o muy menores.

Los números se escriben como un producto: $a \cdot 10^n$, siendo:

- a: un número real mayor o igual que 1 y menor que 10, que recibe el nombre de coeficiente.
- n: un número entero, que recibe el nombre de exponente u orden de magnitud.

Raíces

Se llama raíz n-ésima de una cantidad a a una cantidad b tal que b elevado a n resulte a.

$$\sqrt[n]{a} = b \rightarrow b^n = a$$

Ahora esta relación va mucho más alla, la idea es la siguiente:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Esto significa que una raíz es simplemente una potencia con exponente racional y por ende todas las propiedades vistas anteriormente son aplicables a raíces, sin embargo debemos ver algunos casos particulares muy usuales de ver en raíces.

Racionalización de Radicales

Consiste en quitar los radicales del denominador de una fracción, lo cual facilita la realización de operaciones. Si el denominador contiene un solo término formado por una sola raíz cuadrada. En este caso basta multiplicar numerador y denominador por la misma raíz cuadrada.

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

Introducir o Sacar un Término de una Raíz

$$a\sqrt[n]{b} = a^{\frac{n}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a^n \cdot b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$$

Ejercicio 1

La expresión: $\dfrac{a^3 \cdot b^{-2} \cdot c}{a \cdot b^{-4} \cdot c^{-1}}$

EJERCICIOS

Solución:

$$\frac{a^3 \cdot b^{-2} \cdot c}{a \cdot b^{-4} \cdot c^{-1}} = a^{3-1} b^{-2+4} c^{1+1} = a^2 b^2 c^2 = (abc)^2$$

EJERCICIOS

Ejercicio 2

El valor numérico de $\dfrac{4,8 \cdot 10^{-3} \cdot 2,5}{0,8 \cdot 10^{5}}$ expresado en notación científica, es:

Solución:

$$\frac{4,8 \cdot 10^{-3} \cdot 2,5}{0,8 \cdot 10^{5}}$$

$$\frac{4,8 \cdot 2,5}{0,8} \cdot \frac{10^{-3}}{10^{5}}$$

$$\frac{\frac{48}{10} \cdot \frac{25}{10}}{\frac{8}{10}} \cdot 10^{-3-5}$$

$$\frac{48 \cdot 25 \cdot 10}{8 \cdot 10 \cdot 10} \cdot 10^{-8}$$

$$\frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 10^{-8}$$

$$15 \cdot 10^{-8}$$

$$1,5 \cdot 10^{-7}$$