preunab

Logaritmos y Ecuaciones Logarítmicas

Clase # 4

Universidad Andrés Bello

Definicion

Se llama logaritmo en base b de un número N, al exponente a al cual elevar la base b para obtener el número N.

$$\log_b(N) = a \longleftrightarrow b^a = N$$

Restricciones:

- La base b debe ser mayor que cero, pero distinto de 1.
- El número N, debe ser mayor que cero. No existen logaritmos de números negativos.

Ejemplos

$$\log_3(81) = 4 \rightarrow 3^4 = 81$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(8) = -3 \rightarrow (\frac{1}{2})^{-3} = 2^3 = 8$$

Logaritmos

Sistemas de Logaritmos

El uso de distintas bases de origen a distintos sistemas de logaritmos.

- Logaritmo en base 2: $\log_2(N) = a \longleftrightarrow 2^a = N$.
- Logaritmo en base 3: $\log_3(N) = a \longleftrightarrow 3^a = N$.

Logaritmos Decimales o Comunes

Uno de los sistemas más usados es el de los logaritmos en base 10, llamados logaritmos decimales o comunes.

$$\log_{10}(N) = a \longleftrightarrow 10^a = N$$

Ejemplos:

- $\log_{10}(1000) = 3 \longleftrightarrow 10^3 = 1000.$
- $\log_{10}(0,1) = -1 \longleftrightarrow 10^{-1} = \dfrac{1}{10} = 0,1.$

Logaritmos Decimales de Potencias de 10

Logaritmos comunes de potencias positivas de 10

En general, el logaritmo de una potencia positiva de 10 es igual al número de ceros del número.

- $\log(10) = 1.$
- $\log(100) = 2.$

Logaritmos comunes de potencias negativas de 10

En general, el logaritmo de una potencia negativa de 10 es igual al número de decimales del número, expresado con signo negativo.

- $\log(0,1) = \log 10^{-1} = -1.$
- $\log(0,01) = \log 10^{-2} = -2.$

Propiedades de Logaritmos

Las principales propiedades de los logaritmos son las siguientes:

- logaritmo de la unidad: $\log(1) = 0$
- logaritmo de la base: $\log_b(b) = 1$
- logaritmo de un producto: $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$
- logaritmo de un cuociente: $\log\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$
- logaritmo de una potencia: $\log(x^n) = n \cdot \log(x)$
- logaritmo de una potencia en la base: $\log_{x^n}(y) = \dfrac{1}{n} \cdot \log_x(y)$
- logaritmo cambio de base: $\log_x(y) = \dfrac{\log_z(x)}{\log_z(y)}$

Ejercicio 1

Si $\log(5) = 0,7$, calcule el valor de: $\log(2000)$

Ejercicio 1

Si $\log(5) = 0,7$, calcule el valor de: $\log(2000)$

Solución

Si $\log(5) = 0,7$, calcule el valor de: $\log(2000)$

$$\log(2000) = \log\left(\frac{10000}{5}\right) = \log(10000) - \log(5) = 4 - 0,7 = 3,3$$

Ejercicio 2

Si $\log(5) = 0,7$, calcule el valor de: $\log(\sqrt[3]{5})$

Ejercicio 2

Si $\log(5) = 0,7$, calcule el valor de: $\log(\sqrt[3]{5})$

Solución

Si $\log(5) = 0,7$, calcule el valor de: $\log(\sqrt[3]{5})$

$$log(\sqrt[3]{5}) = log(5^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3} \cdot \log(5) = \frac{1}{3} \cdot 0,7 = \frac{7}{30}$$

Ejercicio 3

Si $\log(2) = 0,3$, el valor numérico de: $\log(50)$ es:
A) $0,7$
B) $1,5$
C)$1,7$
D) $1,8$
E) $2,4$

Solución:

Expresando 50 como: $\dfrac{100}{2}$, queda:

$$\log(50) = \log\left(\frac{100}{2}\right)$$

Aplicando la propiedad del logaritmo de un cuociente:

$$\log\left(\frac{100}{2}\right) = \log(100) - \log(2)$$

Entonces:

$$\log(100) - \log(2) = 2 - 0,3 = 1,7$$

Alternativa correcta: C.

Ejercicio 4

Si $\log(x) + 2\log(y) - \log(z)$, como un solo logaritmo, queda:

A) $\log(2xy - z)$

B) $\log\left(\frac{2xy}{z}\right)$

C)$\log\left(\frac{xy}{z}\right)$

D) $\log\left(\frac{xy^2}{z}\right)$

E) $\log\left(\frac{x^2y^2}{z}\right)$

Solución:

Aplicando en el segundo término la propiedad del logaritmo de una potencia:

$$\log(x) + 2\log(y) - \log(z)$$

$$\log(x) + \log(y^2) - \log(z)$$

Aplicando el logaritmo de un producto a los dos primeros términos y el logaritmo de un cuociente al tercero, queda:

$$\log(x \cdot y^2) - \log(z)$$

$$\log\left(\frac{xy^2}{z}\right)$$

Alternativa correcta: D.

EJEMPLOS

Ejercicio 5

De las siguientes afirmaciones:

$$\text{I) Si } \log_x 10 = 3 \to x = \sqrt[3]{10}$$
$$\text{II)Si } \log_5 x = 4 \to x = 625$$
$$\text{II)Si } \log_3 80 = x \to 3^x = 80$$

Es (son) correcta(s):
A) Sólo (I).
B) Sólo (I) y (II).
C) Sólo (I) y (III).
D) Sólo (II) y (III).
E) (I), (II) y (III).

Solución:

(I) Si $\log_x 10 = 3 \rightarrow x = \sqrt[3]{10}$. VERDADERO.

$$\log_x 10 = 3 \rightarrow x^3 = 10 \rightarrow x = \sqrt[3]{10}$$

(II)Si $\log_5 x = 4 \rightarrow x = 625$ VERDADERO.

$$\log_5 x = 4 \rightarrow 5^4 = x \rightarrow x = 625$$

(III) Si $\log_3 80 = x \rightarrow 3^x = 80$ VERDADERO.

$$\log_3 80 = x \rightarrow 3^x = 80$$

Alternativa correcta: E.