Ecuaciones Logarítmicas y Ecuaciones Exponenciales

Clase # 7

Universidad Andrés Bello

Definición

Son ecuaciones logarítmicas aquellas en que la incógnita aparece en el argumento de un logaritmo.

Ejemplos

$$log(x-5)=3$$

$$log(2x+1)=1-log(x)$$

Método General de Resolución

Las ecuaciones logarítmicas suelen resolverse aplicando las propiedades de los logaritmos hasta llegar a una igualdad de logaritmos de igual base.

$$log(ax + b) = log(px + q)$$

Dos logaritmos de igual base son iguales si sus argumentos son iguales, entonces:

$$log(ax + b) = log(px + q)$$

$$ax + b = px + q$$

Luego, se resuelve la ecuación resultante.

Resolución de Ecuaciones Logarítmicas

Validez de las soluciones

Algunas ecuaciones logarítmicas pueden dar origen a soluciones numéricas no válidas, considerando que, por definición, $log(x)$ siempre $x > 0$.
Para los efectos, una vez obtenidas las soluciones numéricas, se debe analizar la validez de estas en la ecuación original.

Ejemplos

Resolver: $log(x) + log(x - 1) = log(12)$

Ejemplos

Resolver: $log(x) + log(x - 1) = log(12)$
Aplicando en el primer miembro el logaritmo de un producto:

$$log[x(x-1)] = log(12)$$

Cancelando la operación logaritmo:

$$x(x-1) = 12$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-12)}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$x_1 = 4; x_2 = -3$$

Verificando

- Si $x = 4$, todos los términos de la ecuación $logx + log(x-1)$ son válidos, ya que su argumento resulta mayor que cero: $log4 + log(4-1)$.
- Si $x = -3$, los dos términos de la ecuación $logx + log(x-1)$ no resultan válidos, ya que su argumento resulta negativo: $log(-3) + log(-3-1)$.

Por lo tanto, la solución de la ecuación es: $x = 4$.

Ecuación Exponencial

Definición

Se denomina ecuación exponencial aquella en la cual la incógnita aparece solamente en los exponentes de potencias de bases constantes. La incógnita se puede hallar en uno o más exponentes de los términos de la ecuación. Ejemplo:

$$3^{2x+1} = 8$$

Tipos de Ecuaciones Exponenciales

Existen varias posibilidades, se pueden distinguir los siguientes tipos de ecuaciones exponenciales:

- Aquellas que pueden expresarse como igualdad de potencias de igual base.
- Aquellas que pueden expresarse como igualdad de potencias de distinta base.
- Aquellas que admiten un cambio de variable.

Potencias de Igual Base

Para resolver ecuaciones exponenciales por igualación de potencias de igual base, se aplican las propiedades de las potencias y de las raíces hasta llegar a una igualdad de potencias de igual base.

$$A^{mx+n} = A^{px+q}$$

Si dos potencias de igual base son iguales significa que sus exponentes son iguales.
Si: $A^{mx+n} = A^{px+q}$
Entonces: $mx + n = px + q$
Se procede a resolver la ecuación resultante.

Ejemplo

Resolver: $9^{2x+1} = 27 \cdot 3^{6x-4}$

Ejemplo

Resolver: $9^{2x+1} = 27 \cdot 3^{6x-4}$

Primero se expresarán todos los términos como potencias de 3.

$$9^{2x+1} = 27 \cdot 3^{6x-4}$$

$$(3^2)^{2x+1} = (3^3) \cdot 3^{6x-4}$$

Producto de potencias de igual base:

$$3^{4x+2} = 3^{6x-1}$$

Ya igualadas las bases, se igualan los exponentes:

$$4x + 2 = 6x - 1$$

$$2x = 3$$

$$x = 1,5$$

Potencias de Distinta Base

Para resolver ecuaciones exponenciales por igualación de potencias de distinta base constante, se aplican las propiedades de las potencias y de las raíces hasta llegar a una igualdad de potencias de distinta base.

$$A^{mx+n} = B^{px+q}$$

Se aplica acá el operador logaritmo (en cualquier base), con el fin de bajar los exponentes como resultante de aplicar la propiedad del logaritmo de una potencia.

- Si: $A^{mx+n} = B^{px+q}$
- Entonces: $los(A^{mx+n}) = log(B^{px+q})$

Aplicando la propiedad del logaritmo de una potencia:

$$(mx+n)los(A) = (px+q)log(B)$$

Con $log(A)$ y $log(B)$ constantes, se resuelve la ecuación resultante.

Ejemplo: Resolver

$$8^x = 100$$

$$log(8^x) = log(100)$$

$$xlog(8) = log(100)$$

$$x = \frac{log(100)}{log(8)}$$

$$x = \frac{log(10^2)}{log(8)}$$

$$x = \frac{2log(10)}{log(8)}$$

$$x = \frac{2}{log(8)}$$

Cambio de Variable

Este método se utiliza para resolver ecuaciones en las que aparecen sumas y/o restas de potencias que contienen la incógnita.
Para resolver ecuaciones exponenciales por cambio de variable:

- Los términos de la ecuación son reemplazados por una incógnita auxiliar.
- Se resuelve la ecuación con la incógnita auxiliar.
- Utilizando la solución de la incógnita auxiliar se deshace el cambio de variable.

Resolver

$$6^x - 9 \cdot 6^{-x} + 8 = 0$$

Resolver

$$6^x - 9 \cdot 6^{-x} + 8 = 0$$

$$6^x - \frac{9}{6^x} + 8 = 0$$

Se considera $y = 6^x$

$$y - \frac{9}{y} + 8 = 0$$

$$\frac{y^2 - 9 + 8y}{y} = 0$$

$$y^2 + 8y - 9 = 0$$

$$(y + 9)(y - 1) = 0$$

$$y_1 = -9; y_2 = 1$$

$y_1 = 1 \rightarrow 6^x = 1 \rightarrow x = 0$; $y_2 = -9 \rightarrow 6^x = -9$ es imposible.