Sistemas de Ecuaciones Lineales con Dos Incognitas

Clase # 9

Universidad Andrés Bello

Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos Incógnitas

Definición

Se llama sistema de ecuaciones a un conjunto de dos o más ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Ejemplo

$$\left.\begin{array}{rcl} 8y-1 & = & 25-x \\ 5x & = & 16y-2 \end{array}\right|$$

Resolver un sistema de ecuaciones consiste en calcular los valores de las incógnitas que satisfacen simultáneamente a todas las ecuaciones del sistema.

Representación Gráfica de un Sistema de Ecuaciones

Un sistema de ecuaciones con 2 incógnitas representa un plano bidimensional, mientras que cada una de las ecuaciones representa una recta. La solución del sistema es el punto de intersección de todas las rectas que representan a las ecuaciones. Si no existe ningún punto de intersección, el sistema es incompatible, o lo que es lo mismo, no tiene solución.

Análisis de las Soluciones de un Sistema de Ecuaciones

Al resolver el sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas de la forma:

$$\left.\begin{array}{rcl} ax+by & = & c \\ dx+ey & = & f \end{array}\right|$$

Pueden darse cualquiera de las siguientes situaciones:

- Sistema con infinitas soluciones.
- Sistema sin solución.
- Sistemas con solución única.

Sistema con infinitas soluciones

Esto sucede cuando las ecuaciones representan a la misma recta Y. Se produce cuando los coeficientes de x, de y, además, los términos libres son proporcionales.

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$$

Si las tres razones son iguales, entonces son la misma recta, por lo tanto el sistema tiene infinitas soluciones.

Sistema sin solución.

Ocurre cuando el sistema de ecuaciones tiene los coeficientes de x y de y proporcionales entre sí, pero no proporcionales a los términos libres:

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$$

Si solamente las razones de los coeficientes de x y de y son iguales, entonces las rectas son paralelas no coincidentes y el sistema no tiene solución.

Sistemas con solución única.

Esto acontece cuando los coeficientes de x y de y no son proporcionales:

$$\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$$

Si no hay proporcionalidad entre los coeficientes de x y de y, el sistema tiene solución única. Es decir, existe un par (x, y) que satisface al sistema.

Ejemplos

Analice las posibles soluciones del sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} 5x+2y & = & -5 \\ 10x+4y & = & 7 \end{array}\right|$$

Estudiando la proporcionalidad entre los coeficientes de x e y, además la de los términos libres, se llega a lo siguiente:

$$\frac{5}{10} = \frac{2}{4} \neq \frac{-5}{7}$$

Como la primera proporcionalidad se cumple, significa que el sistema NO tiene solución.

Ejemplos

Analice las posibles soluciones del sistema:

$$\left.\begin{array}{rcr} 2x - 5y & = & 1 \\ 10x - 25y & = & 5 \end{array}\right|$$

Estudiando la proporcionalidad entre los coeficientes de x e y, además la de los términos libres, se llega a lo siguiente:

$$\frac{2}{10} = \frac{-5}{-25} = \frac{1}{5}$$

Como las tres proporcionalidades se cumplen, significa que el sistema tiene infinitas soluciones.

Ejemplos

Analice las posibles soluciones del sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x + 5y & = & 13 \\ 3x + 10y & = & 5 \end{array}\right|$$

Estudiando la proporcionalidad entre los coeficientes de x e y, se llega a lo siguiente:

$$\frac{2}{3} \neq \frac{5}{10}$$

Como la proporcionalidad no se cumple, significa que el sistema tiene solución única. Es decir, existe un par (x, y) que satisface al sistema.

Método de Sustitución

El método de sustitución consiste en despejar en una de las ecuaciones cualquier incógnita, y a continuación, sustituirla en la otra ecuación.

Ejemplo

Resolver:

$$\begin{array}{rcl|} x + 5y & = & 3 \\ 2x - y & = & -16 \\ \hline \end{array}$$

En la primera ecuación se despeja x:

$$x = 3 - 5y$$

Esta igualdad se reemplaza (o sustituye) en la segunda ecuación:

$$2x - y = -16$$

Ejemplo

$$2(3-5y)-y=-16$$

Operando algebraicamente:

$$6-10y-y=-16$$

$$-11y=-16-6$$

$$y=\frac{22}{11}=2$$

Ahora se sustituye $y=2$ en alguna de las ecuaciones originales (la más simple):

$$x+5\cdot 2=3$$

$$x=-7$$

La solución al sistema es $(-7,2)$, o bien $x=-7$; $y=2$

Método de Igualación

El método de igualación se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones y a continuación se igualan entre sí:

Ejemplo

Resolver:

$$\left.\begin{array}{rcl} x + 5y & = & 3 \\ 2x - y & = & -16 \end{array}\right|$$

En la primera ecuación se despeja x (también podría ser y):

$$x = 3 - 5y$$

En la segunda ecuación se despeja x:

$$2x - y = -16$$

Ejemplo

$$x = \frac{y - 16}{2}$$

Ahora se igualan las expresiones iguales a x:

$$\frac{y - 16}{2} = 3 - 5y$$

Resolviendo la ecuación de primer grado:

$$y - 16 = 6 - 10y$$

$$11y = 22$$

$$y = 2$$

Ahora se reemplaza en cualquiera de las ecuaciones originales, llegando a $x = -7$.

Método de Reducción

Este método es uno de los más frecuentes. Consiste en operar las ecuaciones de manera que se obtengan dos ecuaciones en la que al seguir operando, una de las incógnitas se anule, quedando una ecuación de primer grado con una sola incógnita.

Ejemplo

Resolver:

$$\begin{array}{rcl|} x+5y & = & 3 \\ 2x-y & = & -16 \\ \hline \end{array}$$

La primera ecuación se multiplica por 2:

$$\begin{array}{rcl|} 2x+10y & = & 6 \\ 2x-y & = & -16 \\ \hline \end{array}$$

Ejemplo

Ahora se resta la segunda de la primera, quedando:

$$11y = 22$$

De donde:

$$y = 2$$

Al reemplazar este valor en una de la ecuaciones originales se obtiene que $x = -7$.

Ejemplo

Ejemplo

En el siguiente sistema, k es una constante.
¿ Qué valor debe tener k para que la solución del sistema sea $(5,0)$?

$$\left.\begin{array}{rcl} 2kx + y & = & 10 \\ x - y & = & 5 \end{array}\right|$$

Solución

En la primera ecuación se reemplazará el punto $(5,0)$:

$$2k \cdot 5 + 0 = 10$$

$$10k = 10$$

$$k = 1$$